第2章

線形代数による可換図式入門

淡中 圏

2.1 紙幅を肥やすための前置き

弁論家は古代からいたが、古代には紙がなかった、ということを我々は忘れがちだ。

だから古代の弁論術は記憶術と表裏一体だったはずだ。

古代の記憶術の元祖シモニデスが詩人であったことも、記憶術が詩の朗読のための技術でもあったということを意味しているのかもしれない。

古代の記憶術は、家などをイメージし、その場所や家具に話題を関連づけていったらしい。

言葉は忘れてしまうが、図像はなかなか忘れない、ということなのだろう。

そして、構造を入れることを忘れてはいけない。

古代の記憶術の構造は、なんとも「構造があった方が覚えやすいから」程度の意味しか感じられない ad hoc な代物に思える。論理ではなく、情緒に訴えかける類のものだ。

それが大きく変わったのは、13 世紀のラモン・リュイ（ラテン名ライムンドゥス・ルルス）の影響だと言われている [1]。

彼は、概念の構成要素を全て洗い出し、それらの組み合わせを「総当たり法」することによって、異教徒を論破し、改宗させせようと目論んだ。

コンピュータの思想的先駆けだとも言われている。

彼の影響を受けたジュリオ・カミッロの「記憶の劇場」や、ジョルダーノ・ブルーノの「記憶術」は、やはり図像を使うが、その図像は単なる図像ではなく、「世界の隠された構造を反映した図像」である。

世界の構造と対応を持つ図像を覚えることにより、ad hoc な図像では実現できない効率で記憶を保つことができ、どんな学問もあっという間に覚えてしまう、と考えたのだ。

それは神秘主義的なオカルトであり、実現不可能な妄想であったのだが、発想自体は間違っていない。

数学においても、式の細部を理解しきるのはなかなか難しい。

そこで、理解を手助けする図が欲しいが、良い図を書くのは、式の細部を理解するよりよほど難しいこともある。

初等教育や中等教育の現場では、図にすれば分かりやすくなるだろうという素朴な発想

から、ad hoc で特に意味のない図を量産し、それを生徒に覚えさせせようとする悲劇が起こっているとも伝え聞く。

特に、高等数学となれば、ただでさえ抽象的な概念ばかりで、図を書くのは非常に難しくなる。

そんな我々が 20 世紀半ばにようやく手に入れた、「図と式の絶妙なハイブリッド」がその名も「図式」である。細部を巧妙に隠して、本質を残して印象に残りやすくしてくれる、便利な存在だ。特に可換図式は「圏論における方程式」の役割を果たしている。

図式というと「圏論怖い」と思う初学者も多いのではないかと思うのだが、図式自体は圏論よりずっと簡単な概念であり、気軽に使って欲しい、という思いでこの論考を書いた。

本来圏論に入門する前に、可換図式に入門すべきなはずなのだ。それを逆にしてしまうと、多項式を扱った経験をあまり持たない人間に、多項式環を教えようとしているような状況になるだろう。それは圏論との出会いを不幸なものにしかねないと思える。

この論考では、圏論は全く使っていない。ただ可換図式を書いただけである。しかしそれでも、可換図式を使わないよりも、議論の見通しがかなり良くなっているのではないかと思う。それが成功しているかの判断は、読者に任せたい。

2.2　概要

線形代数において、行列 A 対角化 $D = PAP^{-1}$ 等における基底変換について説明する際に、黒板に

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & V \arrow[d, "P"'] \\ V \arrow[r, "D"] & V \end{tikzcd}$$

という可換図式を書いてしまいがちだ。しかしこれが分かるようでよく分からない。実際よく分かってない大学生が多い、という印象を受けている。勿体ぶった書き方をやめれば、何を隠そう私がこの図式を理解したのも割と最近なのだった。

そこで、これはあくまで省略形で、本当、三角柱型の可換図式

$$\begin{tikzcd} & & & V & \\ & V \arrow[urr, "F"] & R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \\ R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[urr, "A"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \arrow[urr, "D"'] & & \end{tikzcd}$$

になるはずだ、省略形を書くときは、手では省略形を書いても、頭では完全系を書けるようにしておくべき、という主張をこの短文ではしようと思う。

議論を簡単にするため、ここでは全て実数上の有限次元ベクトル空間を考える。

2.3　基底を図式で書く

正しい可換図式を描くために、普段は図式にしないようなものまでできるだけ図式として書きたい。

まず基底を図式として描こう。

基底を作るためには、まずベクトル空間のベクトルを選ばなくてはいけないので、まずそちらから図式で書く。

ベクトル空間 V のベクトル v を一つ取ると、そこから v だけでなく、他のベクトルも作ることができる。、例えば $v+v=2v$ であり、πv などである。それらの v から作ることができる元は、V の部分ベクトル空間を成し、それを v によって**張られる空間**と呼ぶ。

これは $1 \mapsto v, 2 \mapsto 2v, \pi \mapsto \pi v$ という対応を作っていることになるので、ベクトル空間のベクトル v を一つ選ぶ操作は、線形写像

$$\mathbb{R} \to V; 1 \mapsto v$$

を一つ選ぶことに対応する。

もちろん $v=0$ の場合も上の議論は全く同様に成立している。

次にベクトルを v_1, v_2 と 2 つ選ぼう。

このとき、$a_1v_1 + a_2v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ という形のベクトルが、ついでに作られる。

これは線形写像

$$\mathbb{R}^2 \to V; (a_1, a_2) \mapsto a_1v_1 + a_2v_2$$

を一つ選ぶことに対応する。

同様にベクトル空間 V から n 個の元を選ぶことは、線形写像

$$\mathbb{R}^n \to V$$

を一つ選ぶことに対応する。

ここまでくれば、選ばれた n 個のベクトルが**線型独立**であることと、線形写像 $\mathbb{R}^n \to V$ が単射であることが対応し、選ばれた n 個のベクトルが V の**生成元**であることと、線形写像 $\mathbb{R}^n \to V$ が全射であることが対応することは明らかであろう。

であるので、線型独立な生成元、すなわち V の**基底**とは、同型射

$$B : R^n \xrightarrow{\sim} V$$

である、と言える[*1]。

基底 B を一つ選ぶと、B^{-1} により、ベクトルを数ベクトル R^n の元に対応させることができる。

[*1] 「基底とは $V \xrightarrow{\sim} R^n$」だと考える定式化の筋がいいか悪いか考えてみよう。例えばこの定義は、今回の定式化のように「n の元を取る操作」に一般化できるだろうか。このような問題を考えることで、有限次元ベクトル空間とその双対空間との同型がカノニカルではない、と言うことの「手触り」も感じられるようになるだろう。

与えられたベクトル v に対応する数ベクトルは、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_1$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_2$$

$$\vdots$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_n$$

とした時（通常はこの $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を基底と呼ぶ)、

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書くことにより、

$$v \xmapsto{B^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と具体的に求めることができる。B の全単射性より、この書き方は必ずできて、しかも唯一である。

つまりこれは、基底を固定すればベクトルを数ベクトルだと思ってもいい、ということを意味する。

ここで、2 つの基底を B_1, B_2 を取ってみよう。

$B_1 : R^n \to V$ から $B_2 : R^n \to V$ への基底変換とは、

$$\begin{tikzcd} & V & \\ R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \end{tikzcd}$$

を可換図式にする P のことである。もちろんこれは $P = B_2^{-1} B_1$ ただ一つである。これは R^n の自己同型写像なので、行列で書ける。これを基底の変換行列、という。

P は、

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1e_1 = v_1 \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1}B_1e_1 = B_2^{-1}v_1 = \begin{pmatrix}P(1,1)\\P(2,1)\\\vdots\\P(n,1)\end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1e_2 = v_2 \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1}B_1e_2 = B_2^{-1}v_2 = \begin{pmatrix}P(1,2)\\P(2,2)\\\vdots\\P(n,2)\end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1e_n = v_n \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1}B_1e_n = B_2^{-1}v_n = \begin{pmatrix}P(1,n)\\P(2,n)\\\vdots\\P(n,n)\end{pmatrix}$$

と計算していくことにより、

$$P = \begin{pmatrix}P(1,1) & \cdots & P(1,n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P(n,1) & \cdots & P(2m2)\end{pmatrix}$$

と具体的に求めることができる。

$$B_1; e_1 \mapsto v_1, e_2 \mapsto v_2, \ldots, e_n \mapsto v_n$$
$$B_2; e_1 \mapsto u_1, e_2 \mapsto u_2, \ldots, e_n \mapsto u_n$$

とすれば、$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ という通常の基底の表現が求まるが、これを使えば上の式は、

$$v_1 = P(1,1)u_1 + P(1,2)u_2 + \cdots + P(1,n)u_n$$
$$v_2 = P(2,1)u_1 + P(2,2)u_2 + \cdots + P(2,n)u_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = P(n,1)u_1 + P(n,2)u_2 + \cdots + P(n,n)u_n$$

となることを意味している。

このように、「具体的な元を選ぶ」という操作を、ある特別な対象 (からの—への) 射とみなす、という考え方は、圏論を応用している様々な分野で出会う常套手段である。

他の圏論のテクニックでも言えることだが、難しい問題で必要になる前に、今回のような簡単な問題に応用して、肩慣らしをしておきたい。

2.4　落とし穴

非常にクリアで、どこにも問題はないように思える。

しかし、通常の教授法においては、これらの図式は書かれない。

線形代数の基本を理解している人に聞いてみると、「確かにそうだね」と返ってくるが、普段明示的にこう考えているわけではないのだ。

つまり、これらの図式は、暗黙知として共有されているのだ。

しかし、もし暗黙的にもこれらの図式を頭の中で描けない人が、どうにか線形代数を理解しようとすると、この程度の理論でも落とし穴だらけになってしまう。

彼らの考えをシミュレーションしてみよう。

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ を線型空間 V の基底とする。$u_1, u_2, \ldots, u_n$ を V のもう一つの基底とする。

先ほどの $\{v_i\}$ を $\{u_j\}$ で書いた式を見なおしてみよう。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= P(1,1)u_1 + P(1,2)u_2 + \cdots + P(1,n)u_n \\
v_2 &= P(2,1)u_1 + P(2,2)u_2 + \cdots + P(2,n)u_n \\
&\vdots \\
v_n &= P(n,1)u_1 + P(n,2)u_2 + \cdots + P(n,n)u_n
\end{aligned}
$$

図式が頭にないと、これはまるで

$$
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{(無意味な式)}
$$

という風に見えてしまう。ここから、これが $\{u_j\}$ による表現から、$\{v_i\}$ による表現への変換行列だ、と勘違いしてしまう。

もちろん、それが**逆**である、ということは先ほど見たばかりである。

テンソルや**モノイダル圏**などの言葉を知っている人は、この議論をそれらの言葉で書き直してみても面白いかもしれない。

実は、この勘違いは、小学校での教育から始まっている。それを見るために、1 次元ベクトル空間で、もう一度ここまでの流れを見直してみよう。

実際、一般的な議論をした後に、あえて簡単な例を考えるのはイメージを確かにするための定石である。

2.5　1 次元の場合

身近な 1 次元ベクトル空間の例として、我々がイメージする「長さ」があげられる。

実際のこの世界の「長さ」が実数上のベクトル空間の構造を持つかどうかは不明、というかかなり怪しいものだが、普段はほとんど気にする必要を感じない。

とりあえず、我々は普段、長さを足す、長さを実数倍する、という操作は可能だと考えているだ。

つまり長さに数を作用させることができる、と考えている。

しかし、この時点では長さは数ではない（ちなみにハートリー・フィールドが長さを最後まで数として扱わずに、そもそも数の概念も使わずニュートン力学を構成する、という

苦行めいた仕事をしている [2]。その場合ベクトル空間の概念も使えない)。

このベクトルを一つ取り出す、という操作は、例えばメートル原器を一つ作る、という行為と対応すると考えられるだろう。

そして 1 次元なので、これはそのまま基底を一つ選んだことになる。

そこで初めて、メートル原器 1 つ分の長さを 1、2 つ分の長さを 2、2 つでメートルげんき 1 つ分になるような長さを 0.5、直径がメートル原器 1 分であるような円の周囲の長さを $4.1415926535\cdots$ のように、長さを数として扱うことができる。

メートル原器は基底なのだ。

またそれによってオームの法則や、(線形なものに限らなければ) クーロンの法則などが、数値化することができる。

別の基底を取って、基底変換を求めてみよう。

1000m を基底にとる。

これはつまり、km で長さを数値化する、ということだ。

先ほどの可換図式を書くと、

$$
\begin{tikzcd}
 & V & \\
R \arrow[ur, "\mathrm{m}"] \arrow[rr, "P"'] & & R \arrow[ul, "\mathrm{km}"']
\end{tikzcd}
$$

$$1 \overset{\mathrm{km}}{\longmapsto} 1\mathrm{km} = 1000\mathrm{m}$$

$$1 \overset{\mathrm{m}}{\longmapsto} 1\mathrm{m} = 0.001\mathrm{km}$$

となる。

これを書いてしまうと、小学生が何を間違えるのか分からなくなってしまうが、これが書けないと、

$$1\mathrm{km} = 1000\mathrm{m}$$

という式の形だけ、見て

m を km に直すのは 1000 を書ける

に直すとか勘違いしやすいのだ。

2.6　表現行列の基底変換

では、最後に表現行列を基底変換してみよう。

線形写像 $F : V \to V$ があったとする (議論を簡単にするために、自己写像を考えている)。$B : \mathbb{R}^n \to V$ を V の基底とする。すると、次の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] & V \\
R^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "B^{-1}FB"] & R^n \arrow[u, "B"]
\end{tikzcd}
$$

により、R^n から R^n への線形写像に変換することができる。

ここで $A := B^{-1}FB$ とすると、これは行列で書くことができる。この行列を F の**表現行列**と呼ぶ。

具体的に書けば、

$$B; e_1 \mapsto v_1, \ldots, e_2 \mapsto v_2$$

と通常の基底の表現をした時、

$$\begin{aligned} Fv_1 &= A(1,1)v_1 + \cdots + A(1,n)v_n \\ &\vdots \\ Fv_n &= A(n,1)v_1 + \cdots + A(n,n)v_n \end{aligned}$$

と書き表わせば、

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(n,1) & \cdots & A(n,n) \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、基底を B_1, B_2 と 2 つとる。B_1 での数ベクトル表現からから B_2 での数ベクトル表現への変換行列は、$P = B_2^{-1}B_1$ である。すると、それぞれの基底での F の表現行列 A_1, A_2 は

$$\begin{tikzcd}
 & & & V & \\
 & V \arrow[urr, "F"] & R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \\
R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[urr, "A_1"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \arrow[urr, "A_2"] & &
\end{tikzcd}$$

という可換図式を満たすことになる。

ここから

$$A_2 = PA_1P^{-1}$$

という、見慣れた式が出てくるのである。

今後対角化の際には、実際に書くことは面倒でも、心の隅にこの三角柱図式（プリズム図式、とか格好いいかもしれない）を置いておくといいかもしれない。

そして小学生にもこれを教えれば、単位の変換で混乱することはないかもしれない、と考えたりするのである（アホか）。

定規を使わずに図式を書いたらバツにする授業とか始まって、きっと楽しいぞ！

参考文献

[1] イエイツ, フランセス. 藤田博司/玉泉八州男 監訳. 青木信義 訳. 記憶術. 水声社. 1993.

[2] Field, Hartry H. Science without Numbers: Defence of Nominalism. Bloackwell Pubnlishers. 1982.

[3] 佐武 一郎. 線形代数学（新装版）. 裳華房. 2015.

[4] 平岡 和幸/堀 玄. プログラミングのための線形代数. オーム社. 2004.

[5] レンスター, トム./斎藤 恭司 監修. 土岡 俊介 訳. ベーシック圏論 普遍性からの速習コース. 丸善. 2017