The Dark Side of Forcing

Vol. 8

Nonstandard 宣言

淡中 圏

私は Nonstandard なものが好きだ。なぜならそこに謎があることを我々に教えてくれるからだ。

それは人に無用な限界を勝手に設定しておきながらそれを超えようとする人々を「傲慢」とそしる「メタ傲慢」とでも呼ぶほかない人々が考えるのとは違って、目に見える限界などどこにもないことを我々に教えてくれるのだ。

Nonstandard なものは、Standard なものを知るための鏡のようなものだ。Nonstandard なものを知ることで、我々は Standard なものについてより深い知識を得ることができる。逆に言うと、Standard なものを離れて我々が Nonstandard なものについて知りうること、語りうることは実はほとんどない。

より Standard 側に重心を置く者が多数いるなかに、より Nonstandard 側に重心を置く者が少数ながらちゃんといるという状況は認識の社会的分業として自然なものであろう。

しかし、時にその間の断絶が広く深くなってしまう時がある。Nonstandard なものに注目する者の中に何が Standard かを見失い、些末なことばかり追いかけてしまったりすることもあるし、Standard なものの調査に従事する者が視野狭窄に陥り、Nonstandard なものに関する無知をさらけ出すことも多い。

どうにかこの間を自然に繋げないだろうか。科学コミュニケーションとは科学者と科学者でない者の間をつなぐだけでなく、科学者同士もつながなくてはいけないのではないだろうか。専門家とは専門以外は素人なのだ。

我々はこれからも数学の暗黒面を紹介しながら、数学の光と闇を混ぜ合わせ続けるつもりである。

乞うご期待！

参考文献

[1] 細野晴臣. 1984.*Non-Standard Mixture*, Making of NON-STANDARD MUSIC/Making of MONAD MUSIC A 面, NON-STANDARD.

目次

第 1 章

論理の超準モデル——推論主義的視点から——

鈴木佑京

範疇性や超準モデルというのは、普通自然数論や集合論において研究される事象であるが、哲学的論理学には、「論理の範疇性」「論理の超準モデル」という研究分野がある。例えば古典命題論理の超準モデルにおいては、A と $\neg A$ が同時に真でありえたり、同時に偽でありえたりするのだが、何が論理的に妥当な推論かという点においては、普通の古典論理と変わらないのだ！範疇性は、「推論主義」という哲学的アイディアと深い関連性を持っている。この文章では、形式性を最小限にして、論理の超準モデルの話題を紹介する。

1.1 はじめに

論理学を学んだことがある人の中には、「超準モデル」という概念を聞いたことがある人は多いと思う。超準モデルとは、大まかにいえば

- 「公理を立てることによって特定の数学的対象を取り出す」という手続きがうまく通用しないような現象

を表現した概念である。

普通超準モデルの概念は、自然数論や集合論などに適用される。だが、哲学的論理学においては、「論理の超準モデル」とでも言うべき現象を扱う研究が存在する。今回はそれを、形式性を必要最小限にしつつ、背景にある哲学的モチベーションと共に、紹介しようと思う。同時に、「論理の超準モデル」に関する議論を例として、哲学において数学が使われるとき——というか、数学以外の学問に数学を応用するとき、非常に重要な教訓のひとつに言及したい。

基本的な論理の知識（古典命題論理の完全性定理程度）のみを仮定する。

1.2　超準モデルとはなんぞや

数学において、議論の対象がなんであるかをはっきり決めようというとき、ふつう使われるのが、**対象が満たすべき公理を設定する**、という方法である。例えば、群論が扱う対象は群であるが、群がなにものであるかは、群が満たすべき公理を設定することによって定められる。これを以下、「公理的方法」と呼ぶことにしよう。

こうした手続きは数理論理学においては、**理論**とその**モデル**の概念を使って記述される（と考えることもできる）。**理論**とは、数学的対象が満たす（べき）公理を集合としてまとめたものである。理論をひとつ定めることは、数学的対象が満たすべき公理系を設定することにあたる。理論に対して、そこに含まれる公理がすべて真であるような対象のことを、その理論の**モデル**という。すると公理的方法は、理論を定めることで、そのモデルとして、議論の焦点にあたる数学的対象を確定する手続きとしてとらえることができる。

ところで、公理的方法によって数学的対象を決定しようというとき、一般には、ただ一つの構造を決定できるとは限らない。公理系を満たすもののなかには、同型ではないものがありうる。例えば、群の公理を満たす集合はすべて同型であるわけではない。数理論理の言葉で言い直すのであれば、理論のモデルがすべて同型であるとは限らない。

理論のモデルがすべて同型であるようなケースは特別なものとして、範疇性という言葉によってとらえられる。ある理論のモデルがすべて同型であるとき、その理論は**範疇的**である、という。

理論が一般的に範疇的である必要がある、ということはない。すでに述べたように群論の公理系は、同型でないモデルが多数存在するので範疇的ではないが、それは問題とはみなされない。他方で、数学的概念のなかには、ただ一つの構造と結びついているものもある。代表的な例が自然数概念である。自然数の概念は、（一般的な理解によれば）、オメガ列という構造——0 から初めて、1 ずつ数え進めていくことで生成される構造——と結びついている。0 から始めて任意有限回数えることによって得られる数はすべて自然数である。0 から始めて任意有限回数えつづけることによって到達できないような自然数は存在しない。したがって、0 から数え進めることによっては得られないような要素が含まれている構造は、自然数の構造とはいえない。

自然数のような特定の構造と結びついた対象を公理的方法によって取り出そうとするならば、理論が範疇的であることは望ましい。なぜならば範疇性が成り立っていないとすれば、理論のモデルの中に、取り出したい当の構造とは別の構造をもつものが紛れ込んでしまうことになるからである。取り出したいモデルのことを一般に**標準モデル**といい、範疇的でない場合に紛れ込む、標準モデルと同型でないモデルを**超準モデル**という。

たとえば自然数の集合を公理的方法によって特徴づけようとしたとき、立てた公理系（理論）が範疇的でないとしよう。すると、0 から始めて数え続けることによっては到達できない要素が存在する超準モデルが、あたかも自然数集合でございというような顔で、公理系のモデルとして表れてきてしまう。ちなみに、一階の算術的言語——ゼロ、「一数え進める」という操作、足し算、掛け算、等号、及び一階述語論理の論理定項——によって自然数の範疇的な公理系を構築することはできない、ということが知られている。

以上が、数理論理学一般における形式体系の「範疇性」ないし「超準モデル」という問題意識の簡単な説明である。公理とそれを満たすもの、理論とそのモデルの間に緊密な関

係が存在し、理論がモデルを（同型を除いて）ただ一つに決めてしまうような場合が「範疇的」であると言われる。逆に、理論とモデルの間の関係がルーズで、ただ一つの構造を取り出すことができないとき、「超準モデル」が入り込む。

1.3　モデル概念の論理への拡張その 1

「超準モデル」の概念を論理に拡大することを考えてみよう（そんなことを考えることにどんな意味があるのかは後で説明する）。とりあえず、議論を古典命題論理に限る。

群やベクトル空間、自然数の理論に照応するのは、論理の**形式体系**である。形式体系とは、論理的に真であるとされる公理の集合と、公理をもとに定理を生み出すための推論規則をまとめたものを指す。超準モデルや範疇性といった概念を論理に拡大するには、論理の形式体系のモデルが何か、を定めてやらなければならない。

群やベクトル空間の公理は、（モデルについて）真であることを意図されている。そのため、群やベクトル空間のモデルは、公理を真にするような対象として定義される。一方で、論理の形式体系はそもそも、特定の対象について真であることを意図されたものではない。論理は一般的なものであるからである。では、真である代わりに論理の形式体系に意図されていることは何か。そのひとつは、健全性である。

いま、論理式は $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ という 4 つの論理定項と可算個の命題変数から作られるものとし、古典論理の（単一結論の）形式体系 CL が一つ適当に確定しているとする。すると CL の健全性は次のように定義される。

定義 1.3.1 (導出関係) 論理式の集合 Γ と論理式 A について、Γ の有限部分集合から A に至る証明が CL で可能であるとき、$\Gamma \vdash A$ と書く。

定義 1.3.2 (付値) 論理式から $\{t, f\}$ への関数を付値と言う。さらに、以下の条件を満たす付値 v を標準的付値という。

任意の論理式 A, B について、

- $v(A \wedge B) = t$ *iff.* $v(A) = t$ *and* $v(B) = t$
- $v(A \vee B) = t$ *iff.* $v(A) = t$ *or* $v(B) = t$
- $v(A \rightarrow B) = t$ *iff.* $v(A) = f$ *or* $v(B) = t$
- $v(\neg A) = t$ *iff.* $v(A) = f$

標準的付値の集合を LV という[*1]。

定義 1.3.3 (論理的帰結) 論理式の集合 Γ と論理式 A が、任意の $v \in LV$ について、次の条件を満たす場合、$\Gamma \models A$ と書く。

- ある $B \in \Gamma$ について、$v(B) = f$ であるか、
- $v(A) = t$。

なお上記の *2* つの条件を満たさない付値のことを、Γ/A の反例と呼ぶことにする。$\Gamma \models A$ は、LV に Γ/A の反例が存在しないことと同値である。

[*1] よく知られているように、任意の標準的付値 v において、$v(A \rightarrow B) = v(\neg A \vee B)$ となる。

定義 1.3.4 (健全性) 任意の Γ, A について、$\Gamma \vdash A$ ならば $\Gamma \models A$ であるとき、CL は健全であるという。

標準的付値の集合は、式へ真偽を割り当てる様々な可能性を表現したものと考えることができる。そうした可能性のすべてにおいて、Γ が真であるならば A が真であるとき、Γ から A が論理的に帰結する。したがって健全性は、形式体系において導出できる推論は、どのような可能性を考えたとしても、前提の真理を結論に保存する、ということを意味している。これは、論理の形式体系にとってぜひとも成り立っていてほしい性質である。

今、通常の公理系にとっての「真である」という性質とアナロジカルに、論理の形式体系にとっての「健全である」という性質をとらえるとしよう。すると、次のように「健全性」の概念を一般化することで、論理の形式体系のモデルを定義できるようになる。

定義 1.3.5 (V における帰結) 付値の集合 V があるとする。標準的付値以外を含んでいてもよい。論理式の集合 Γ と論理式 A について、V に Γ/A の反例が存在しない場合、$\Gamma \models_V A$ という。

定義 1.3.6 (V における健全性とモデル) 任意の Γ, A, V について、$\Gamma \vdash A$ ならば $\Gamma \models_V A$ であるとき、CL は V について健全であるという。このとき、V を CL のモデルと呼ぶ。

つまり、論理の形式体系を「式に対する真偽割り当ての可能性の集合」について記述したものととらえたうえで、形式体系において可能であるような推論をすべて（真ではなく）論理的帰結とするような集合を、モデルとしてとらえるわけである。モデルの同型性は、単純に、集合として同じであるかどうかとしてとらえればよい。

このようにモデルの概念を形式体系に拡張してやると、範疇性や標準モデル・超準モデルといった議論を古典命題論理の形式体系について行うことが可能になる。標準モデルは LV であり、形式体系のモデルが LV しか存在しない状況を範疇的と呼べばよい。

1.4　モデル概念の論理への拡張その 2

だが、前節で定義されたモデル概念に基づくと、範疇性や標準モデル・超準モデルといった問題は興味深いものとは言えなくなる。なぜなら、あまりにも簡単に範疇性が成り立たないことがわかるからである。

帰結は、モデルの中のすべての付値についての全称的な性質であるため、付値の集合がより小さくなれば、そのぶん帰結は拡大する。そして健全性は、帰結が導出関係よりも大きいことを要請している。したがって、ある付値集合で健全性が成り立つなら、それよりも小さい付値集合では必ず健全性が成り立ってしまう（極端な例としては、空集合で健全性が成り立つ）。よって、範疇性は成り立たない。

形式体系の健全性は、帰結の集合が適切に大きいこと、すなわち、付値の集合が適切に小さいことを要請するものとみることができる。範疇性や標準モデル・超準モデルの概念をより興味深いものとするためには、付値の集合が適切に大きいことを要請するような条件も設定したい。そこで、健全性だけでなく完全性もまた条件に含める形で、モデルの概念を定式化しなおそう。

定義 1.4.1 (V における完全性と完全モデル) 任意の Γ, A, V について、$\Gamma \models_V A$ ならば $\Gamma \vdash A$ であるとき、CL は V について完全であるという。CL が V について健全でありかつ完全であるとき、V を CL の完全モデルと呼ぶ。

完全モデルには健全性に加えて完全性もまた要求される。完全性は、健全性と逆に、標準的帰結の集合が適切に小さいこと、付値の集合が適切に大きいことを要求している。そのため、モデルの概念を完全モデルに強めれば、先ほどの問題は生じない。

1.5　論理の超準モデル

完全モデルの概念に基づいたとき、範疇性は成り立つといえるだろうか。つまり、あらゆる完全モデルは、標準的付値の集合 LV であると言えるだろうか。

LV が完全モデルであることは、次の定理から分かる。

定理 1.5.1 任意の Γ, A について、$\Gamma \vdash A$ と $\Gamma \models A$ は同値である。つまり、LV は CL の完全モデルである。

よって問題は、LV 以外の完全モデル——超準モデル——が存在するかどうかということになる。そして実は、超準モデルは存在する。

定理 1.5.2 (論理の超準モデル) CL には超準モデルが存在する。

証明 1.5.1 超準モデルとして *2* つの例を挙げる。

- *[1]* 任意の式に t を割り当てる付値を T と書く。$LV \cup \{T\}$ は CL の完全モデルである。
  完全性:LV で完全性が成り立っている。$\models_{LV \cup \{T\}}$ は明らかに $\models_{LV}$ より小さいので、当然 $LV \cup \{T\}$ でも完全性が成り立つ。
  健全性:Γ, A に関わらず、T は Γ/A の反例にならない。$T(A) = t$ であるからである。ゆえに、$\Gamma \models_{LV} A$ なら $\Gamma \models_{LV \cup \{T\}} A$ である。よって、LV の健全性から $LV \cup \{T\}$ の健全性が成り立つ。
  だが、あきらかに $LV \cup \{T\} \neq LV$ なので、$LV \cup \{T\}$ は CL の超準モデルとなる。
- *[2]*$\{t, f\}^2$ から $\{t, f\}$ への関数であって、$\langle t, t\rangle$ にのみ t を返し、それ以外に f を返すような関数を $\&$ と書く。さらに、LV^2 の元に対し LV の元を次のように定める関数を C と呼ぶ。$C(v_0, v_1)(A) = \&(v_0(A), v_1(A))$。すると、$C$ による LV^2の像・$C(LV^2)$ は CL の完全モデルとなる。
  完全性：$\Gamma \not\models_{LV} A$ を仮定する。このとき、Γ/A の反例 $v \in LV$ が存在する。すると、$C(v, v) \in C(LV^2)$ が Γ/A の反例となる。なぜなら、任意の B について、$C(v, v)(B) = \&(v(B), v(B)) = v(B)$ となるため、$v = C(v, v)$ であるからである。よって $\Gamma \not\models_{C(LV^2)} A$。対偶を取って、$\Gamma \models_{C(LV^2)} A$ ならば $\Gamma \models_{LV} A$。よって LV の完全性から完全性が成り立つ。
  健全性:$\Gamma \not\models_{C(LV^2)} A$ を仮定する。すると、Γ/A の反例 $C(v_0, v_1) \in C(LV^2)$ が存在する。このとき、次の *2* つが成り立つ。
  - $i = 0, 1$ のどちらについても、$v_i(\Gamma) = \{t\}$。$\because\ C(v_0, v_1)(\Gamma) = \&(v_0(\Gamma), v_1(\Gamma)) = \{t\}$

– $i = 0, 1$ のどちらかについて、$v_i(A) = f$。$\because C(v_0, v_1)(A) = \&(v_0(A), v_1(A)) = f$

したがって、v_0, v_1 のどちらかが、Γ/A の反例となる。よって、$\Gamma \not\models_{LV} A$。対偶を取って、$\Gamma \models_{LV} A$ ならば $\Gamma \models_{C(LV^2)} A$。よって LV の健全性から健全性が成り立つ。

だが、$C(LV^2) \neq LV$ である。なぜなら、$v_0 \neq v_1$ のとき、ある論理式 A について、$v_0(A) \neq v_1(A)$ となるが、すると $C(v_0, v_1)(A) = C(v_0, v_1)(\neg A) = f$ となるからである。

つまり、ある文とその否定の双方に真を割り当てる付値や、双方に偽を割り当てる付値をモデルから排除できないのである。

1.6　推論主義との関係

さて、ここで先程ペンディングしておいた、「そもそもなんでこんなことを考えるのか」というモチベーションの問題に移ろう。もちろん１つの理由はこの現象が愉快であるということである。だがもう少し深い理由もある（以下は哲学的な話が続くので、興味がない人は次の節まで飛ばしてもらってもかまわない）。

哲学において、「推論主義」というものが存在する。推論主義とは一言で言えば、表現の意味は、その表現が登場する文に関する推論規則によって定められる、という主張である。推論主義はウィトゲンシュタインのいわゆる「使用説」——言語表現の意味を、その表現の使用のされ方と同一視する——をアイデアの淵源としている。ダメットの証明論的意味論や、ブランダムの表現主義といった注目を集めている哲学的プログラムは、推論主義に基づいたものである。

他方で、論理の哲学においては、このように呼ぶのは一般的なならわしではないが、「論理に関する分析主義」とでも言うべき根強い考え方がある。論理に関する分析主義とは、重要な論理的現象（その内実はとりあえずおいておくとして）は、論理定項の意味に基いて説明されるべきである（つまり、論理的現象はすべて分析的に説明できる）、という考え方である*2。

今、「推論主義」と「論理に関する分析主義」を組み合わせると、次のような帰結が出て来る。重要な論理的現象は、論理定項についての推論規則に基いて説明されるべきである、という帰結である。すると例えば、古典命題論理に関して成り立つ重要な論理的現象は、古典命題論理の形式体系に基いて説明されるべきである、ということになろう。

ここで、（古典命題論理について）、「論理式に対してどのような真理値の割り当てが論理的に可能なものとして認められるのか」、特に、「論理的に可能な真理値割り当てにおいて、論理定項を含む複雑な式に割り当てられる真理値は、単純な式の真理値とどのような関係にあるのか」ということを、重要な論理的現象と認めるのは、それほど奇異ではない。すると、次の直観的に成り立つと思われる事実、すなわち、

*2 分析哲学の歴史を解説した文章を読むと、「クワインによって分析性と総合性の区別は否定された」というような文章が必ず存在するので、まるで分析性という概念が哲学から永久追放されたかのような印象を受ける人も多いと思う。が、実情としては、クワインの議論は必ずしも決定的なものとは見なされておらず、「表現の意味」に説明資源として訴えることは今も行われている。

- 標準的付値だけが論理的に可能な付値として認められるということ
- 標準的付値であればすべて論理的に可能であるとして認められること

つまり、論理的に可能な付値の集合は LV であるということを、CL が形式体系として採用されているという事実から説明することが望ましい。

この説明のためのもっとも明快な方法の 1 つが、「CL の完全モデルが LV だけである」ことを示すことである。

推論が妥当であるのは、論理的に可能な付値のすべてにおいて、前提の真理性が結論の真理性を含意するときであり、そのときだけである、というのは、ほぼすべての哲学者が受け入れる見解であろう[*3]。すると、どのような推論が妥当であるかということは、どのような付値が論理的に可能であるかと連動する。したがって、形式体系を定め、妥当な推論を定めることは、同時に、どのような付値が論理的に可能であるかを定めることになる。

このことを形式的に表現したのが、完全モデルの概念であると考えられる。よって、もし、CL の完全モデルが LV だけであるとすれば、それは、論理的に可能な付値の集合が LV であることを、CL が形式体系として採用されていることから説明したことになろう。

というわけで、推論主義と論理に関する分析主義を前提とすると、CL の完全モデルが LV であることが望ましいものとなる。推論主義はしばしば、指示・充足・真理といったモデル論的概念に基づく意味理論に対するオルタナティブとして紹介される。それは必ずしも間違いではない。推論主義は指示・充足・真理の概念を説明資源として使用せず、あくまで推論規則の概念をベースとする。

だがだからといって、モデル論的概念が無価値であるということにはならない。そして、指示・充足・真理といった概念が重要であるとするなら、推論主義はそれを自らのベースである推論規則の概念に基づいて説明する義務を負う。

1.7 範疇性を取り戻すための試み

が、残念ながら CL には超準モデルが存在する。ではどうしたらよいだろうか。

証明したい定理が証明できないときの数学での常套手段は、仮定を強めることである。仮定の強め方として現在までに提案されているものを三つ紹介しよう。

最も有名なのは、複数結論に基づくものである [1]。

我々がいままで考えてきたのは、複数の前提に単一の結論が対応するような推論・帰結だけであった。だが論理学では、これを一般化して、複数の前提に複数の結論が対応するような推論・帰結を考えることがある。典型的には、古典論理のシーケント計算を論じる場合、複数結論が登場する。今、古典論理のシーケント計算 LK が 1 つ適当に定まっているとしよう（LK の定義については例えば [8] を参照）。

定義 1.7.1 (複数結論の導出関係) 論理式の集合 Γ, Δ について、Γ の有限部分集合 Γ' と Δ の有限部分集合 Δ' が存在し、$\Gamma' \vdash \Delta'$ が LK で証明できるなら、$\Gamma \vdash \Delta$ と書く。

定義 1.7.2 (V における複数結論の帰結) $v(\Gamma) = \{t\}, v(\Delta) = \{f\}$ である時、v は Γ/Δ

*3 推論の妥当性が論理的に可能な付値における真理保存性と同値であるということと、推論の妥当性を論理的に可能な付値における真理保存性として定義することとは異なる。ここで問題になっているのは前者である。

の反例である、という。論理式の集合 Γ, Δ と付値の集合 V について、Γ/Δ の反例が存在しない場合、$\Gamma \models_V \Delta$ という。

完全性・健全性・LK の完全モデルの概念は単一結論の場合と同じように定めればよい。

定理 1.7.1 (複数結論についての範疇性) *LK* の完全モデルは *LV* のみである。

証明 1.7.1 *LV* が *LK* の完全モデルであることの証明は省略する（ *[8]* を参照)。

V が LK の完全モデルであるとする。今、付値 v に対して、$!(v) = \{A|v(A) = t\}$、$?(v) = \{A|v(A) = f\}$ とする。明らかに、$!(v)/?(v)$ の反例は v しか存在しない。

$V \subset LV$ を示す。$v \in V$ だとする。すると、v は $!(v)/?(v)$ の反例なので、$!(v) \not\models_V ?(v)$。よって $!(v) \not\vdash ?(v)$、よって $!(v) \not\models_{LV} ?(v)$。 よって $!(v)/?(v)$ の反例 v が LV の中に存在する。

$LV \subset V$ を示す。$v \notin V$ だとする。$!(v)/?(v)$ の反例は v だけだから、$!(v) \models_V ?(v)$。よって $!(v) \vdash ?(v)$、$!(v) \models_{LV} ?(v)$。したがって $v \notin LV$。対偶を取れば $v \in LV$ ならば $v \in V$。

よって $V = LV$。

別の対処法としては、論理式に対して「主張」「否認」という 2 つの態度を原始的なものとして認める、双側面説の立場が Smiley によって提案されている [5]。

双側面説では、推論を式から式を導出するものとしてではなく、ある式を「主張する」ないし「否認する」という態度から、別の式の主張・否認を導くものとして考える。例えば、$+A, +B, -C \vdash -D$ と書いた場合、A を主張し、B を主張し、C を否認するという態度から、D を否認するという態度が導かれる推論を表現している。このように推論を捉え直した上で形式体系や付値集合についての帰結の概念を再定義すると、完全モデルが LV だけであることが証明できる。

以上の 2 つの対処法は、推論や帰結の構造自体を変えるというものであるが、推論や帰結の構造は保ったまま、形式体系とモデルの間の連関のあり方を考え直す、と言う方向性もある。

我々はモデルが形式体系に対し健全かつ完全であることを要求することで完全モデルの概念にたどり着いた。だがもっと強い要求をモデルに課すこともできる。例えば、形式体系に登場する推論規則が、モデルにおける論理的帰結を保存する（つまり、$\Gamma \models_V A$ であり、かつ、$\Gamma \vdash A$ から $\Delta \vdash B$ が形式体系の中のある推論規則に基いて導けるなら、$\Delta \models_V B$ である）という条件を課すこともできる。この条件を満たす付値集合を、Garson は体系の"大域的モデル"と呼ぶ [4]。

この立場に基づくと、形式体系のモデルが何かという問題は、形式体系において可能な推論だけではなく、どのような推論規則を採用するかという点にも関わってくる。したがって、導出関係において等価な形式体系であっても、異なるモデルを持つということがありうる。Garson はこのような立場に基づき、様々な形式体系のモデルを研究している。

1.8　最後に、そして哲学へ戻る

ここまでの内容をまとめると次のようになる。我々はモデルの概念を論理に拡張することで、古典命題論理の範疇性を問題にすることができるようになる。推論主義の立場を前

提とすれば、古典命題論理の形式体系は範疇的であることが望ましいが、現実にはそのようにはなっていない。そこで、推論や帰結の構造を変えたり、あるいはモデルの概念を個々の推論規則にセンシティブになるように再定義したりすることで、モデルの範囲を限る試みがなされている。

最後に、一歩引いた視点から、こうした議論状況をどう考えればよいか考えてみよう。範疇性を手に入れるための様々な試みは、それ自体として、数学的・論理学的にそれなりに興味深いと思う。だが、推論主義という哲学的モチベーションに立ち戻った時、どのように評価されるべきであろうか。

あたりまえのことだが、仮定を強めれば強めるほど、より強力な定理が手に入る。すでに述べたように、複数結論・双側面説・推論規則への注目といった試みはすべて、モデルに対する仮定をそれぞれの仕方で強めたものであると考えることができる。すると問題は、ここで強められた仮定が、哲学的にどう動機づけできるかどうかという点になる。

もともと我々のモチベーションは推論主義に端を発するものであった。そして推論主義は、一定の推論規則を採用する、ということをベースに、様々な論理的現象を説明しようとする。であるならば問題は、一定の推論規則を採用して我々が推論を行う、という推論実践の中に内在するような仮定だけが、モデルの決定に動員されているのか否か、ということであろう。もしもモデルの性質を探求する際において、一定の推論規則を採用するという事実に内在しない仮定が動員されているとすれば、それは推論主義というモチベーションとは関係のないものになってしまうだろう。

例えば、（完全）モデルの定義の中に、次のような条件を追加するとしよう。「モデル V は、LV の部分集合でなければならない」。このような新しい仮定のもとに、（完全）モデルについて何らかの定理を証明したとしても、推論主義的なモチベーションはもはや失われていると言わざるをえないだろう。なぜなら、一定の規則に則った推論実践の中に、モデル概念に対する件の仮定自体を直接的に正当化するようなことがらがなにか内在しているようにはとても思えないからである[*4]。このようなアドホックな仮定を立てることは許されない。

したがって、そもそも複数の結論をもつ推論などというものが推論実践において登場するのか/ないし登場しうるのか、式ではなく主張と否認といった態度を関連付ける推論が推論実践に登場するか/しうるか、我々の推論実践において、そもそも個々の推論規則が導出関係の決定を超えて重要性を持っているといえるのか、個々の推論規則が帰結を保存するということまで前提されているのか。こういった問題点を検討することが、推論主義の立場からは不可欠である[*5]。

またそもそも、論理の範疇性が議論になる場合、付値が二値的であることは前提とされてしまう事が多いが、これは果たして正当化できるものであろうか。仮に古典論理を前提したとしても、古典的推論実践の中に、真理値が二値であることを含意するような事実があるだろうか。もしもないとすると、多値の付値をまともに受け取る必要があるだろう。そして、クリーネ三値論理は、シークエント計算 LK にたいし完全かつ健全であるという

[*4] もちろん、例えば、複数結論の可能性を推論実践に内在する仮定として正当化したうえで、完全モデルが LV しか存在しないことを前節のように証明することで、完全モデルが LV の部分集合であることを間接的に正当化する、ということはできる。

[*5] こうした検討がなされている代表的な論文として、複数結論については [6]、主張/否認の使用については [7] [3] を見よ。

ことが知られている [8][*6]。

まとめると、論理の範疇性に関する探求は、それが推論主義というモチベーションに端を発するものであるのなら、どのように仮定を強めることでどのように範疇性を示すか、という数学的な問題だけではなく、何が推論に内在するのか、という（少なくともそれ自体としては）哲学的な問題に向き合わざるをえない。後者の問題に対する答えがはっきりしない限り、前者の問題に対する取り組みを評価する軸が失われる。

ここから我々は一般的な教訓を引き出せる。純数学的なモチベーションではなく、応用的なモチベーションを前提にしているとき、「ある数学的な仮定からある数学的な定理を示せる」という主張には、我々は注意深くあらねばならない。その応用的なモチベーションにとって、その仮定を措くことはどれだけ正当化できるのか。あるいはその定理を示すことで、応用的なモチベーションをどれだけ果たせるか。こうした補助的な議論無くしては、応用された数学は本来果たすことのできる建設的な役割を失い、単に人を威圧し恫喝する武器として、あるいは魔法のようにすべてを解決する道具として扱われることになりかねない。数式を毛嫌いする人ばかりが増えていくということになるわけである。

参考文献

[1] Carnap, R. 1943. *Formalization of Logic*,Harvard University Press.

[2] Church, A. 1944. Review of *Formalization of Logic*, Philosophical Review 53(5):493.

[3] Dickie, I. 2010. Negation, anti-realism, and the denial defence. Philosophical Studies 150 (2):161-185.

[4] Garson, W. 2013. *What Logics Mean: From Proof Theory to Model-Theoretic Semantics*, Cambridge University Press.

[5] Smiley, T. 1996. Rejection, Analysis 56 (1):1-9.

[6] Steinberger, F. 2011. Why Conclusions Should Remain Single, Journal of Philosophical Logic 40:333-335.

[7] Textor, M. 2011. Is ‘no’ a force-indicator? No!, Analysis 71(3):448-456.

[8] Girard, J. Y. 1987. *Proof Theory and Logical Complexity* Volume 1, Bibliopolis.

[*6] [8] によると、クリーネ三値論理をシーケント計算の分析に使用したのはシュッテである（クリーネは論理の発案者である）。ただしクリーネ三値論理が LK に対し健全かつ完全であることを示す場合、帰結関係は真理保存性ではなく、反例の排除によって定義される（つまり、「前提が真なら結論も真」ではなく、「前提が真で結論が偽、ということはない」という風に定義する）。そのため、クリーネ三値論理が範疇性に対する脅威となるためには、二値性が推論実践に内在的ではない、というだけではなく、推論にとって本質的なのは（真理保存性ではなく）反例の排除である、ということを別に論じる必要がある。

第 2 章

真の日々　——The Days of Truth

淡中 圏

世界とは成立している事実全体である、などと語り始めたときには、我々はすでにまたぞろ語りえぬことを騙る騙りえぬことを語る一歩を踏み出してしまっている。

お暇な皆様に朗報！　論理民俗学（Logical Folklore or Folk Logic）にまた新しい発見の報が入りました！

これまでにも、ペアノの公理系の矛盾を示すことができる「不自然数」の概念を基礎として数学を展開し工学などに応用しようとしている部族や、自分たちは行き止まりの世界に住んでいて「すべてのものは必然であり何もかもが不可能だ」と信じている部族、エメラルドは glue つまりこれまで見つかったものはすべて緑（green）だがまだ見つかってはいないものはすべて青（blue）だと信じている部族、「カラスは黒い」ことを証明しようと世界中を旅して黒くないものがすべて烏でないことを確認している一族などを紹介してきました。

そこに今回加える人々は、まず安心してしまう事実から言いますと、彼らは論理として古典論理を採用しているのですが、まだ安堵するには時期尚早というもの。彼らはなんと、何もかもが真であることが可能であると信じているのです。もしそうなったら、あらゆる命題 p に対して、p もその否定 $\neg p$ も、両方とも真であることになってしまいます。

もちろんそんなことが可能なら、この世界が矛盾することが可能になってしまう。だったら矛盾許容論理を採用するべきでは、と誰もが思うでしょう。しかし、彼らは平気の平左。もし本当にそんなことがあっても、我々は少しも変だと気づけないというのです。確かに爆発律により、そんなことがあったら全ての命題が証明可能になってしまう。しかし実際すべての命題は真なので、それが証明可能になっても痛くも痒くもないというのです。実際 p が真かつ偽なのではなくて、間違いなく p は真なのです。そして $\neg p$ も証明可能ですが、これも真なので問題ありません。p が真だからって、$\neg p$ が偽になるわけでなく、全部真なのです。

彼らはそのようなことが可能である以上、かつてそのような「すべてが真である日」があったと、そしていつかそのような「すべてが真である日」が来ると、信じているのです。それは、この世ならぬ祝祭の時間なのです。本来は肯定と否定の片方にしか分与され

ないはずの「真である」という性質がすべての命題に与えられる日。ケに対するハレ、藁の日々にたいする草の日々。計算外の日々、余分な日々なのです。白人のいうところのインディアンの夏、インディアンのいうところのエンジンの夏、オランダ人のいうところの鶴の夏（クラーンゾマー）、英国人のいうところの聖マルティヌスの夏（セント・マーティンズ・サマー）、聖ジェルヴェーゼの夏、諸聖人の夏、少女の夏（メッチェンゾマー）、ミダスの三月、青春の日（ヘイデイ）、犬の日々、ドラゴンの日々、収穫の五月、象牙の日々、角の日々、ウィックロウの週、あんずの秋、鴨の夏、巨石の日々、ひねくれ道（クルツクト・マイル）の日々、古のギリシャ人がアルケドニア=ハルシオンすなわちカワセミの日々と呼んだ日々、カエサルが「最後の混乱の年」とも「混乱の年」とも呼ばれる年に永遠に禁止した第１３月メルケディヌス、どんな文化にも伝えられているが、本来の用法を理解できないがゆえに、「冬に穏やかな気候が続く日々、小春日和」のような適当な意味を与えられている言葉の真の意味。その日には、すべての生物及び非生物が人間となり、すべての人間及び非人間は神々となり、レスリングをしあっては相手の腕や首をちぎって、アナログの山から投げ落とします。するとばらばらになった者どもは大笑いしながら、世界中に酷烈な祝福の血しぶきをまき散らすのです。

実際にそんな日があったのかどうか、彼らに訊いても仕方ありません。彼らが考えるには、そんな日々を実際に経験しても、彼らは気づけないのですから。だからこそそれは余分な日々であり、計算外の日々なのです。ただ彼らは、たき火を囲みながら、自分たちの祖先がそんな日々にどんな勲しを立てたかを自慢し合い、次のそんな日々に、自分たちがどんな荒唐無稽な命題を肯定するかを語り合うのです。彼らは必ずいくつかの仮定を主張することから、ただ一つの結論を肯定します。肯定すること、そして唯一の結論、それこそが彼らの考える正しい生き方なのです。

彼らについての今後の調査結果にご期待ください。

参考文献

[1] 鈴木佑京 『論理の超準モデル――推論主義的視点から――』, 本誌第??章.

[2] ラファティ, R.A. 1993 『どろぼう熊の惑星』, 早川書房.

第 3 章

トポスの内部言語について

古賀 実，才川隆文

本稿ではトポスの内部言語を整理します．構文と証明体系を定義したのち，内部解釈による意味論に対する証明体系の健全性を示します．前半では古賀が，Osius の論文 [7] に基づいてトポスの内部言語についてごく簡単に紹介し，後半では才川が，文脈を明示的に書く形に証明体系を改良します．

SGL [2] の第 IV 章にあるような，トポスに関する基本的な事実を前提知識として想定しています．

3.1 Osius 流の内部言語

$\mathcal{E}$ をトポスとする．$\mathcal{E}$ の部分対象分類子を $\mathrm{true}: 1 \rightarrowtail \Omega$ と書く．$\mathcal{E}$ の対象 X に対し，X の部分対象全体を $\mathrm{Sub}(X)$ と書き，X の部分対象 $m : A \rightarrowtail X$ の classifying morphism を $\mathrm{char}(m)$ と書く：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{char}(m)"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

特に，対角射（diagonal morphism $\Delta_A : A \rightarrowtail A \times A$）の classifying morphism $\delta_A : A \times A \to \Omega$ は，Kronecker のデルタと呼ばれる：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "\Delta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ A \times A \arrow[r, "\delta_A"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

部分対象 $m : M \rightarrowtail X$ と $n : N \rightarrowtail X$ に対して，関係 $m \leq n$ を，$\mathcal{E}$ の射 $f : M \to N$ が存在して $m = nf$ が成立することとして定めると，$\mathrm{Sub}(X)$ はハイティング代数となる．ハイティング代数 $\mathrm{Sub}(X)$ の下限，上限，含意，最小元，最大元をそれぞれ，$\wedge, \vee, \Rightarrow, \perp_X, \top_X$ と書くことにする．

3.1.1　構文

定義 3.1.1. トポス $\mathcal{E}$ の内部言語 $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ は，以下のものからなる：

(i) $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の型：$\mathcal{E}$ の対象 $A, B, \ldots$ ；

(ii) $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項を以下の規則に従って与える：

（a）型 1（終対象）である定数記号 $*$ が存在し，$*$ は項である；

（b）各型 A に対して可算無限個の変数が存在し，各変数 $x, x', \ldots$ は項である．t が型 T の項であることを $t{\in}T$ と書く；

（c）$\mathcal{E}$ の射 $f : A \to B$ と項 $t{\in}A$ に対し，$f(t)$ は型 B の項である；

（d）項 $t{\in}A$ と項 $u{\in}B$ に対し，$\langle t, u\rangle$ は型 $A \times B$ の項である；

（e）項 $t_1{\in}A_1, \ldots, t_n{\in}A_n$ $(n \geq 0)$ に対して，順序付けられた n 組 $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$（$n = 0$ のとき $\langle\rangle$ と書く）を以下で定義する：

$$\langle\rangle := *, \quad \langle t_1\rangle := t_1, \quad \langle t_1, \ldots, t_n\rangle := \langle\langle t_1, \ldots, t_{n-1}\rangle, t_n\rangle.$$

(iii) $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の論理式は，以下の規則によって構成される：

（a）論理記号 $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \bot, \top$ がある；

（b）各型 A に対して，シグニチャが (A, A) である二項述語 $=_A$ がある；

（c）（原子論理式）次は論理式である：

(1) $\bot, \top$ ；

(2) $t =_A u$（$t, u{\in}A$）．

（d）$\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の論理式は，通常の規則に従って，原子論理式から構成される：

(1) φ と ψ が論理式であるとき，$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi, \neg\varphi$ は論理式である；

(2) 型 A の自由変数 x と論理式 φ に対して，$\forall x{\in}A\varphi$ と $\exists x{\in}A\varphi$ は論理式である．

変数の型が推論可能な場合には $\forall x{\in}A\varphi$ と $\exists x{\in}A\varphi$ はそれぞれ，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ と書くことがある．

(iv) 変数の束縛出現，自由出現は通常通りに定義されるものとする．論理式 φ の自由変数全体を $\mathrm{Fv}(\varphi)$ と書き，変数 $x{\in}A$ が φ の自由変数であることを，$x \in \mathrm{Fv}(\varphi)$ などと書く．

(v) 項 t や論理式 φ における自由変数への項の代入は既知とする．代入の記法として以下を用いる：

$$t[s/x], \varphi[s/x]$$

この記法を用いるときはいつも，項 s が φ において変数 x に代入可能であるとする．すなわち，φ における x の任意の自由出現の位置において，s の変数が束縛されていないとする． $\Diamond$

定義 3.1.2. $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の論理式 φ が，次の体系で導出されるとき，φ は intuitionistically provable[*1]といい，$\vdash \varphi$ と書く：

公理　($\top$-intro)　$\top$;

*1　[7] では “intuitionistically valid” と呼んでいる．

(K) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$;

(S) $[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)]$;

($\wedge$-intro) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi)$;

($\wedge$-elim) $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$;

($\vee$-intro) $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$;

($\vee$-elim) $(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)]$;

($\neg$-intro) $(\varphi \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\varphi$;

($\neg$-elim) $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \perp)$;

($\perp$-elim) $\perp \Rightarrow \varphi$;

($\exists$-intro) $\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$;

($\forall$-elim) $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi$;

($=$-refl) $\forall x[x =_A x]$;

($=$-sym) $\forall x\forall y[x =_A y \Rightarrow y =_A x]$;

($=$-trans) $\forall x\forall y\forall z[x =_A y \wedge y =_A z \Rightarrow x =_A z]$;

($=$-congr-pair) $\forall x\forall x'\forall y\forall y'[x =_A x' \wedge y =_B y' \Rightarrow \langle x, y\rangle =_{A\times B} \langle x', y'\rangle]$;

($=$-congr-f) $\forall x\forall y[x =_A y \Rightarrow f(x) =_B f(y)]$（$f : A \to B$ は $\mathcal{E}$ の任意の射）.

導出規則 (RMP) $\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

($\exists$-elim) $x \notin \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\exists x\varphi \Rightarrow \psi}$$

($\forall$-intro) $x \notin \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，

$$\frac{\psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \forall x\varphi}$$

(Subst) 項 $t{\in}A$ に対して，

$$\frac{\varphi}{\varphi[t/x]}$$

$\Diamond$

3.1.2 内部解釈

定義 3.1.3. 変数 $x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n$ をとる．

(i) 項 $t{\in}A$ を，$\mathrm{Fv}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 0)$（$n = 0$ は変数なしを表す）を満たすものとする．t の $x_1, \ldots, x_n$ に関する表現

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto t\}$$

を，$\mathcal{E}$ の射として，項の構成の複雑さに関する帰納法によって，以下で定義する：

(a) $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto *\}$ は（唯一つ存在する）射 $!^{A_1\times\cdots\times A_n} : A_1 \times \cdots \times A_n \to 1$;

(b) $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto x_i\}$ は射影 $\pi_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$;

（c）射 $f : A \to B$ に対して，$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto f(t)\} := f \circ \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\}$;

（d）$r{\in}B$ と $s{\in}C$ に対して，$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\}$ は次の図式を可換にする，$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\}$ と $\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}$ から唯一つに定まる射：

$$\begin{tikzcd} & A_1 \times \cdots \times A_n \arrow[dl, "\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto t\}"'] \arrow[d, dotted, "\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle t,u\rangle\}"] \arrow[dr, "\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto u\}"] & \\ B & B \times C \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & C. \end{tikzcd}$$

すなわち，

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\} = \langle \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\}, \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}\rangle$$

である．

(ii) 論理式 φ を，$\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ $(n \geq 0)$（$n = 0$ は変数なしを表す）を満たすものとする．φ の $x_1, \dots, x_n$ に関する表現

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi\}$$

を，$A_1 \times \cdots \times A_n$ の部分対象として，論理記号の数に関する帰納法によって，以下で定義する：

（a）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \bot\} := \bot_{A_1 \times \cdots \times A_n} : 0 \rightarrowtail A_1 \times \cdots \times A_n$;

（b）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \top\} := \top_{A_1 \times \cdots \times A_n}$,

（c）項 $t, u{\in}A$ に対して，

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid t =_A u\} = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\}^{-1}(\Delta_A).$$

すなわち，$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid t =_A u\}$ は $\delta_A \circ \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\}$ を classifying morphism とする部分対象である：

$$\mathrm{char}(\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid t =_A u\}) = \delta_A \circ \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\};$$

論理式 φ と論理式 ψ に対して，

（d）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi \wedge \psi\} := \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi\} \wedge \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \psi\}$;

（e）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi \vee \psi\} := \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi\} \vee \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \psi\}$;

（f）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi \Rightarrow \psi\} := \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi\} \Rightarrow \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \psi\}$;

（g）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \neg\varphi\} := \neg \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \varphi\}$.

（h）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \forall x{\in}A\varphi\} := \forall_\pi \{\langle x_1, \dots, x_n, y\rangle \mid \varphi[y/x]\}$;

（i）$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \exists x{\in}A\varphi\} := \exists_\pi \{\langle x_1, \dots, x_n, y\rangle \mid \varphi[y/x]\}$.

ここで，右辺の $y{\in}A$ は $x_1, \dots, x_n$ とは異なるものである．また，$\forall_\pi$ と $\exists_\pi$ は，射影 $\pi : A_1 \times \dots A_n \times A \to A_1 \times \cdots \times A_n$ の引き戻し

$$\pi^{-1} : \mathrm{Sub}(A_1 \times \cdots \times A_n) \to \mathrm{Sub}(A_1 \times \cdots \times A_n \times A)$$

の随伴である（cf. [2, §IV.9]）：

$$\exists_\pi \dashv \pi^{-1} \dashv \forall_\pi. \qquad \Diamond$$

定義 3.1.4 (internal validity). 論理式 φ と項 $t{\in}A$ が，ちょうど変数 $x_1{\in}A_1,\dots,x_n{\in}A_n$ $(n \geq 0)$ を自由変数にもち，この順番に初めて自由出現するとする．このとき，

(i) $\mathrm{Dom}(t) := A_1 \times \cdots \times A_n$ を t のドメインと呼ぶ；
(ii) $\mathrm{Dom}(\varphi) := A_1 \times \cdots \times A_n$ を φ のドメインと呼ぶ.[*2]

(i) $\|t\| := \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto t\} : \mathrm{Dom}(\varphi) \to A$ を t の**内部解釈**と呼ぶ；
(ii) $\|\varphi\| := \mathrm{char}(\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\}) : \mathrm{Dom}(\varphi) \to \Omega$ を φ の**内部解釈**と呼ぶ.

$\|\varphi\| : \mathrm{Dom}(\varphi) \to \Omega$ が部分対象分類子 $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ を通るように分解されるとき φ は **internally valid**（または，**universally valid**）であるといい，$\models \varphi$ と書く：

$$\models \varphi \quad \text{iff} \quad \|\varphi\| = \mathrm{true} \circ !^{\mathrm{Dom}(\varphi)},$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ \mathrm{Dom}(\varphi) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "\|\varphi\|"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

$\{x_1,\dots,x_n\} = \mathrm{Fv}(\varphi)$ ととると，$\|\varphi\| = \mathrm{char}(\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\})$ であるから，$\models \varphi$ とは，$\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\}$ が $\mathrm{Sub}(\mathrm{Dom}(\varphi))$ の最大元 $\top_{\mathrm{Dom}(\varphi)}$ であることを指す：

$$\begin{aligned} \models \varphi \quad &\text{iff} \quad \mathrm{char}(\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\}) = \mathrm{true} \circ !^{\mathrm{Dom}(\varphi)} \\ &\text{iff} \quad \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi)}. \end{aligned}$$

また，論理式 $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi$ に対して，導出規則

$$\frac{\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_n}{\psi}$$

が internally valid であるとは，$\models \varphi_1,\dots,\models \varphi_n$ であるとき，$\models \psi$ であることを指す. $\Diamond$

3.1.3 健全性

変数 $x{\in}A_1,\dots,x_n{\in}A_n$ をとる．このとき，次の 3 つの事実がある（ [7, 2.22–24]）：

事実 3.1.5 (superfluous variables). 変数 $x_{n+1}{\in}A_{n+1},\dots,x_{n+k}{\in}A_{n+k}$ を，項 t と論理式 φ に現れないものとする．また，$\pi : A_1 \times \cdots \times A_{n+k} \to A_1 \times \cdots \times A_n$ を射影とする．このとき，次が成立する：

(i) $\{\langle x_1,\dots,x_{n+k}\rangle \mapsto t\} = \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto t\} \circ \pi$;
(ii) $\{\langle x_1,\dots,x_{n+k}\rangle \mid \varphi\} = \pi^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\})$ $\square$

事実 3.1.6 (permuting variables). σ を $1,\dots,n$ の置換，$f_\sigma : \prod_{i=1}^n A_i \to \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}$ を対応する同型射とする．このとき，次が成立する：

(i) $\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto t\} = \{\langle x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}\rangle \mapsto t\} \circ f_\sigma$;
(ii) $\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi\} = f_\sigma^{-1}(\{\langle x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}\rangle \mid \varphi\})$. $\square$

*2 Osius の論文 [7] では，$\mathrm{Dom}(t)$ と $\mathrm{Dom}(\varphi)$ をそれぞれ，t の type，φ の type と呼んでいる.

事実 3.1.7 (substitutions). 変数 $x{\in}B$ が項 t において出現，φ において自由出現し，項 $s{\in}B$ が φ で x に代入可能であるとする．このとき，次が成立する：

(i) $\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto t[s/x]\} = \{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mapsto t\} \circ \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}$;

(ii) $\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi[s/x]\} = \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}^{-1}\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \varphi\}$. □

証明. 項 t や論理式 φ の構成の複雑さに関する帰納法で証明される．論理式が論理結合子 $\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg$ を用いて，$\varphi\wedge\psi,\varphi\vee\psi,\varphi\Rightarrow\psi,\neg\varphi$ と書かれている場合は，引き戻しがハイティング代数の演算を保つことからよい．例えば，$\wedge$ について，次が成立する：

$$\begin{aligned}
&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid (\varphi\wedge\psi)[s/x]\}\\
=&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi[s/x]\}\wedge\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \psi[s/x]\}\\
=&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \varphi\})\\
&\quad\wedge\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \psi\})\\
=&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \varphi\}\wedge\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \psi\})\\
=&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,x\rangle \mid \varphi\wedge\psi\}).
\end{aligned}$$

論理式が量化子を含む場合は，Beck-Chevalley condition (cf. [2, §IV.9], [5, A1.4.11]) を使えばよい．ここでは，論理式が変数 $z{\in}A$ を用いて，$\exists z\varphi$ と書かれている場合を考える．簡単のため，$X := A_1\times\cdots\times A_n$ とし，項 $s{\in}B$ に対して，

$$\bar{s} := \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mapsto s\}$$

とおく．射影 $\pi : X\times A\to X$ をとる．代入条件より z は s に出現しないから，$\varphi[s/x][y/z]=\varphi[y/z][s/x]$ であることに注意すれば，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
&\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \exists z\varphi[s/x]\}\\
=&\exists_\pi(\{\langle x_1,\dots,x_n,y\rangle \mid \varphi[y/z][s/x]\})\\
=&\exists_\pi(\{\langle x_1,\dots,x_n,y\rangle \mapsto \langle x_1,\dots,x_n,y,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi[y/z]\}))\\
=&\exists_\pi(\langle \mathrm{id}_{X\times A},\bar{s}\rangle^{-1}(\{\langle x_1,\dots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi[y/z]\}))
\end{aligned}$$

である．射影 $\pi' : X\times A\times B\to X\times B$ をとる．このとき，次は引き戻し正方図式である：

$$\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_{X\times A},\bar{s}\rangle"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X\times A\times B \arrow[d, "\pi'"] \\
X \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_X,\bar{s}\rangle"'] & X\times B.
\end{tikzcd}$$

Beck-Chevalley condition は，次の可換性をいう：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(X\times A) \arrow[d, "\exists_\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Sub}(X\times A\times B) \arrow[l, "\langle \mathrm{id}_{X\times A},\bar{s}\rangle^{-1}"'] \arrow[d, "\exists_{\pi'}"] \\
\mathrm{Sub}(X) & \mathrm{Sub}(X\times B), \arrow[l, "\langle \mathrm{id}_X,\bar{s}\rangle^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$$\exists_\pi \langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{s}\rangle^{-1} = \langle \mathrm{id}_X, \bar{s}\rangle^{-1}\exists_{\pi'}.$$

また, 変数の入れ替えに関する事実 3.1.6 より, 射影 $\pi'' : X\times B\times A \cong X\times A\times B \to X\times B$ をとれば,

$$\begin{aligned}
&\exists_{\pi'}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi[y/z]\}))\\
=\ &\exists_{\pi''}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x,y\rangle \mid \varphi[y/z]\}))\\
=\ &\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists z\varphi\}))
\end{aligned}$$

であることに注意すれば，次を得る：

$$\begin{aligned}
&\exists_\pi(\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{s}\rangle^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi[y/z]\}))\\
=\ &\langle \mathrm{id}_X, \bar{s}\rangle^{-1}(\exists_{\pi'}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi[y/z]\}))\\
=\ &\langle \mathrm{id}_X, \bar{s}\rangle^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists z\varphi\}))\\
=\ &\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\ldots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists z\varphi\}).
\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
&\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid \exists z\varphi[s/x]\}\\
=\ &\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mapsto \langle x_1,\ldots,x_n,s\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists z\varphi\}).
\end{aligned}$$

を得る．全称量化子に関しても同様である．証明終わり． ■

事実 3.1.8. 変数 $x{\in}A_1,\ldots,x_n{\in}A_n, x{\in}A$ と射影 $\pi : A_1\times\cdots\times A_n\times A \to A_1\times\cdots\times A_n$ に対して，次が成立する：

(i) $\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists x\varphi\} = \pi^{-1}(\exists_\pi(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \varphi\})$;

(ii) $\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \forall x\varphi\} = \pi^{-1}(\forall_\pi(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \varphi\})$. □

証明. 存在量化子についてのみ示す．簡単のため，$X := A_1\times\cdots\times A_n$ とし，変数 $y{\in}A$ に対して,

$$\bar{y} := \{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mapsto y\}$$

とおく．さらに，$\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle$ に対し，$\pi'\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle = \mathrm{id}_{X\times A}$ なる射影 $\pi' : X\times A\times A \to X\times A$ をとれば，事実 3.1.5 と事実 3.1.6，事実 3.1.7 より，次が成立する：

$$\begin{aligned}
&\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \exists x\varphi\}\\
=\ &\pi^{-1}\,\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid \exists x\varphi\}\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi\,\{\langle x_1,\ldots,x_n,y\rangle \mid \varphi[y/x]\}\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y\rangle \mapsto \langle x_1,\ldots,x_n,y,y\rangle\}^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi\}))\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi(\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,y,x\rangle \mid \varphi\}))\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi(\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x,y\rangle \mid \varphi\}))\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi(\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle^{-1}(\pi'^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \varphi\})))\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi((\pi'\circ\langle \mathrm{id}_{X\times A}, \bar{y}\rangle)^{-1}(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \varphi\}))\\
=\ &\pi^{-1}\exists_\pi(\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle \mid \varphi\}).
\end{aligned}$$

全称量化子についても同様である．証明終わり． ■

事実 3.1.9. 項 $t, u{\in}A$ に対して，変数 $x_1{\in}A_1, \dots, x_n{\in}A_n$ を，項 $\langle t, u\rangle$ にちょうど現れる変数とする．このとき，次が成立する：

$$\models t =_A u \quad \text{iff} \quad \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\} = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}. \qquad \square$$

証明. 等号に関する論理式の表現は

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid t =_A u\} = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\}^{-1}(\Delta_A)$$

であったから，論理式 $t =_A u$ の内部解釈 $\|t =_A u\|$ は，

$$\begin{aligned} \|t =_A u\| &= \mathrm{char}(\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid t =_A u\}) \\ &= \mathrm{char}(\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\}^{-1}(\Delta_A)) \\ &= \delta_A \circ \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\} \end{aligned}$$

である．よって，次が成立する：

$$\begin{aligned} & \models t =_A u \\ \text{iff} \quad & \delta_A \circ \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\} = \mathrm{true} \circ !^{A_1 \times \cdots \times A_n}. \end{aligned}$$

項 $\langle r, s\rangle$ の表現より，

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto \langle t, u\rangle\} = \langle \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\}, \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}\rangle$$

であった．Kronecker のデルタの性質 (cf. [2, §IV.1, p. 166]) より，次が成立する：

$$\begin{aligned} & \delta_A \langle \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\}, \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}\rangle = \mathrm{true} \circ !^{A_1 \times \cdots \times A_n} \\ \text{iff} \quad & \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto t\} = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mapsto u\}. \end{aligned}$$

証明終わり. ■

事実 3.1.10 (weakening, restricted strengthening). 2 つの射 $\theta : X \to \Omega$ と $f : A \to X$ があり，$\theta = \mathrm{true} \circ !^X$ であるとする．このとき，$\theta \circ f = \mathrm{true} \circ !^A$ が成立する：

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, dotted] & X \arrow[r, "\theta"'] \arrow[ur] & \Omega. \end{tikzcd}$$

換言すれば，$m : M \rightarrowtail X$ を X の部分対象で $\mathrm{char}(m) = \theta$ であるものとすると，$m = \top_X$ であるとき，$f^{-1}(m) = \top_A$ が成立する（weakening）．

さらに，f がエピ射である場合，次が成立する：$\theta \circ f = \mathrm{true} \circ !^A$ ならば，$\theta = \mathrm{true} \circ !^X$（restricted strengthening）． □

証明. 後半の主張のみ示す．f をエピ射とする．次に注意すればよい：

$$\begin{aligned} & \theta \circ f = \mathrm{true} \circ !^A \\ \text{iff} \quad & \theta \circ f = \mathrm{true} \circ !^X \circ f \\ \text{iff} \quad & \theta = \mathrm{true} \circ !^X. \end{aligned}$$

証明終わり. ■

事実 3.1.11. 論理式 φ と論理式 ψ に対して，次が成立する：

(i)
$$\models \neg\varphi \quad \text{iff} \quad \|\varphi\| = \text{false} \circ !^{\text{Dom}(\varphi)};$$

(ii)
$$\models \varphi \quad \text{and} \quad \models \psi \quad \text{imply} \quad \models \varphi \wedge \psi;$$

(iii)
$$\models \forall x\varphi \quad \text{iff} \quad \models \varphi.$$

さらに，変数 $x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n, x{\in}A$ を，$\{x_1, \ldots, x_n\} = \text{Fv}(\varphi) \cup \text{Fv}(\psi)$ であるものとする．このとき，次が成立する：

(iv)
$$\models \varphi \vee \psi \quad \text{iff} \quad \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} \vee \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\} = \top_{\text{Dom}(\varphi\vee\psi)};$$

(v)
$$\models \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{iff} \quad \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\}. \qquad \square$$

証明. (i) $\|\varphi\| = \text{false} \circ !^{\text{Dom}(\varphi)}$ のとき，$\neg \circ \text{false} = \text{true}$ だから，

$$\|\neg\varphi\| = \neg \circ \|\varphi\| = \neg \circ \text{false} \circ !^{\text{Dom}(\varphi)} = \text{true} \circ !^{\text{Dom}(\varphi)}.$$

よって，$\models \neg\varphi$ である．

$\models \neg\varphi$ とする．すなわち，$\neg\circ\|\varphi\| = \text{true}\circ!^{\text{Dom}(\varphi)}$ とする．次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, "\text{false}"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\
\text{Dom}(\varphi) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "\|\varphi\|"'] & \Omega \arrow[r, "\neg"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，$\|\varphi\| = \text{false} \circ !^{\text{Dom}(\varphi)}$ を得る．

(ii) 変数 $x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n$ を，$\{x_1, \ldots, x_n\} = \text{Fv}(\varphi \wedge \psi)$ であるものとする．このとき，

$$\models \varphi \wedge \psi \quad \text{iff} \quad \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} \wedge \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\} = \top_{\text{Dom}(\varphi\wedge\psi)}$$

である．$\text{Fv}(\varphi), \text{Fv}(\psi) \subseteq \text{Fv}(\varphi \wedge \psi)$ であるから，$\text{Dom}(\varphi \wedge \psi) = A_1 \times \cdots \times A_n$ とおくと，$\text{Dom}(\varphi) = A_1 \times \cdots \times A_k$，$\text{Dom}(\psi) = A_l \times \cdots \times A_n$ $(k, l \leq n)$ と書くことができる．2 つの射影

$$\pi_\varphi : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_1 \times \cdots \times A_k,$$
$$\pi_\psi : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_l \times \cdots \times A_n$$

があり，次が成立する：

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} = \pi_\varphi^{-1}(\{\langle x_1, \ldots, x_k\rangle \mid \varphi\}),$$
$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\} = \pi_\psi^{-1}(\{\langle x_l, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\}).$$

$\models \varphi$ かつ $\models \psi$ とする．このとき，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \mid \varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi)},$$
$$\{\langle x_l, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\psi)}$$

であるから，weakening により，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi\wedge\psi)},$$
$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi\wedge\psi)}$$

である．よって，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \wedge \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi\wedge\psi)}$$

である．すなわち，$\models \varphi \wedge \psi$ である．

(iii) $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Fv}(\forall x\varphi)$, $x{\in}A$ とし，射影

$$\pi : \mathrm{Dom}(\varphi) \to \mathrm{Dom}(\forall x\varphi)$$

をとる．

($\models \forall x\varphi$ ならば $\models \varphi$)：$\models \forall x\varphi$ とする．すなわち，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \forall x\varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\forall x\varphi)} \tag{3.1}$$

とする．量化子に関する論理式の表現より，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \forall x\varphi\} = \forall_\pi(\{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\}) = \top_{\mathrm{Dom}(\forall x\varphi)} \quad (y{\in}A)$$

である．一方，随伴 $\pi^{-1} \dashv \forall_\pi$ により，

$$\begin{aligned} &\pi^{-1}(\top_{\mathrm{Dom}(\forall x\varphi)}) \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\} \\ \text{iff} \quad &\top_{\mathrm{Dom}(\varphi)} \leq \forall_\pi(\{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\}) \end{aligned}$$

である．π^{-1} が極限を保つことに注意すれば，(3.1) より，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi)}$$

を得る．すなわち，$\models \varphi$ である．

($\models \varphi$ ならば $\models \forall x\varphi$)：$\models \varphi$ とする．このとき，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi)}$$

が成立する．量化子に関する論理式の表現より，

$$\begin{aligned} &\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \forall x\varphi\} \\ &= \forall_\pi(\{\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \mid \varphi[y/x]\}) \quad (y{\in}A) \end{aligned}$$

である．右随伴 $\forall_\pi$ は極限を保つから，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \forall x\varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\forall x\varphi)}.$$

が成立する．すなわち，$\models \forall x\varphi$ である．

以下，$\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Fv}(\varphi) \cup \mathrm{Fv}(\psi)$ とする．

(iv) 定義より，次が成立する：

$$
\begin{aligned}
& \models \varphi \vee \psi \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi \vee \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi \vee \psi)} \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \vee \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi \vee \psi)}.
\end{aligned}
$$

(v) 任意のハイティング代数 $(H, \leq, \Rightarrow, 0, 1)$ において，任意の $a, b \in H$ に対して，

$$a \leq b \quad \text{iff} \quad (a \Rightarrow b) = 1$$

であったから，

$$
\begin{aligned}
& \models \varphi \Rightarrow \psi \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi \Rightarrow \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi \Rightarrow \psi)} \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \Rightarrow \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\varphi \Rightarrow \psi)} \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} \quad \text{in} \quad \mathrm{Sub}(\mathrm{Dom}(\varphi \Rightarrow \psi))
\end{aligned}
$$

が成立する．

証明終わり． ■

補題 3.1.12. 公理 ($\top$-intro), (K), (S), ($\wedge$-intro), ($\wedge$-elim), ($\vee$-intro), ($\vee$-elim), ($\neg$-intro), ($\neg$-elim), ($\perp$-elim) は internally valid である． □

証明． この事実は，事実 3.1.11 (v) と，各対象 X に対して $\mathrm{Sub}(X)$ がハイティング代数であることから従う．以下では，公理 (K), (S), ($\vee$-elim) についてのみ確かめる．

(K) 変数 $x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n$ を，$\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Fv}(\varphi) \cup \mathrm{Fv}(\psi)$ であるものとする．このとき，次が成立する：

$$
\begin{aligned}
& \models \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi) \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi \Rightarrow \varphi\} \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} \Rightarrow \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \\
\text{iff} \quad & \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\} \wedge \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \psi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \varphi\}.
\end{aligned}
$$

ところで，最終行は任意のハイティング代数で成立しているため，$\models \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ である．

(S) 以下では，変数 $x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n$ を，$\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Fv}(\varphi) \cup \mathrm{Fv}(\psi) \cup \mathrm{Fv}(\chi)$ であるものとする．また，簡単のため，論理式 θ に対して，

$$[\![\theta]\!] := \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \theta\}$$

とおく．次が成立する：

$$
\begin{aligned}
& \models [\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)] \\
\text{iff} \quad & [\![\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)]\!] \leq [\![(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)]\!] \\
\text{iff} \quad & [\![\varphi]\!] \Rightarrow ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \leq ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) \Rightarrow ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \\
\text{iff} \quad & \big([\![\varphi]\!] \Rightarrow ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!])\big) \wedge ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) \leq [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!] \\
\text{iff} \quad & \big([\![\varphi]\!] \Rightarrow ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!])\big) \wedge ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!] \leq [\![\chi]\!].
\end{aligned}
$$

ここで，任意のハイティング代数 $(H, \leq, \Rightarrow, 0, 1)$ において，任意の $a, b \in H$ に対して，

$$((a \Rightarrow b) \wedge a) \leq b \qquad (\because (a \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow b)) \tag{3.2}$$

であることに注意する．これを用いると，次を得る：

$$\begin{aligned}
&\Big([\![\varphi]\!] \Rightarrow ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!])\Big) \wedge ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!] \\
&= \Big(([\![\varphi]\!] \Rightarrow ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!])) \wedge [\![\varphi]\!]\Big) \wedge \Big(([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!]\Big) \quad (\because [\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\varphi]\!]) \\
&\leq ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge [\![\psi]\!] \quad (\because (3.2)) \\
&\leq [\![\chi]\!].
\end{aligned}$$

(∨-elim) 次が成立する：

$$\begin{aligned}
&\models (\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)] \\
\text{iff}\quad & [\![\varphi \Rightarrow \chi]\!] \leq [\![(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)]\!] \\
\text{iff}\quad & [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!] \leq ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \Rightarrow \Big(([\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]) \Rightarrow [\![\chi]\!]\Big) \\
\text{iff}\quad & ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \leq \Big(([\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]) \Rightarrow [\![\chi]\!]\Big) \\
\text{iff}\quad & ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]) \leq [\![\chi]\!].
\end{aligned}$$

ハイティング代数が分配律を満たすことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge \Big([\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]\Big) \\
&\leq \Big(([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!]\Big) \vee \Big(([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge [\![\psi]\!]\Big) \\
&\leq \Big([\![\chi]\!] \wedge ([\![\psi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!])\Big) \vee \Big(([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\chi]\!]) \wedge [\![\chi]\!]\Big) \quad (\because (3.2)) \\
&\leq [\![\chi]\!]
\end{aligned}$$

である．

証明終わり．　■

補題 3.1.13. 次の量化子に関する論理式は internally valid である：

(∃-intro)

$$\varphi \Rightarrow \exists x \varphi;$$

(∀-elim)

$$\forall x \varphi \Rightarrow \varphi.$$

□

証明． 論理式 φ を，$x{\in}A, x_1{\in}A_1, \ldots, x_n{\in}A_n$ を自由変数にもつものとし，$\pi : A_1 \times \cdots \times A_n \times A \to A_1 \times \cdots \times A_n$ を射影とする．

$$m := \{\langle x_1, \ldots, x_n, x\rangle \mid \varphi\}$$

とおく．このとき，事実 3.1.8 と事実 3.1.11 (v) より，

$$\begin{aligned}
&m \leq \pi^{-1}(\exists_\pi(m)), \\
&\pi^{-1}(\forall_\pi(m)) \leq m
\end{aligned}$$

を示せばよい．随伴 $\exists_\pi \dashv \pi^{-1}$ の単位元（unit）

$$\eta_\exists : \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(A_1\times\cdots\times A_n\times A)} \to \pi^{-1}\exists_\pi$$

と $\pi^{-1} \dashv \forall_\pi$ の余単位元（counit）

$$\varepsilon_\forall : \pi^{-1}\forall_\pi \to \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}(A_1\times\cdots\times A_n\times A)}$$

が存在することによりよい．証明終わり． ■

補題 3.1.14 (restricted modus ponens). 論理式 φ と論理式 ψ に対して，$\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，次の導出規則は internally valid である：

(RMP)

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

証明. $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{Fv}(\psi)$ とする．$\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ であるから，射影 $\pi : \mathrm{Dom}(\psi) \to \mathrm{Dom}(\varphi)$ がある．よって，$\models \varphi$ より

$$\|\varphi\| \circ \pi = \mathrm{true} \circ !^{\mathrm{Dom}(\psi)}$$

が得られる（weakening）：

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
\mathrm{Dom}(\psi) \arrow[r, "\pi"'] \arrow[urr, dotted] & \mathrm{Dom}(\varphi) \arrow[r, "\|\varphi\|"'] \arrow[ur] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

すなわち，

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\psi)}$$

である．一方，事実 3.1.11 (v) より，

$$\models \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{iff} \quad \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\}.$$

であった．以上より，$\models \varphi$ と $\models \varphi \Rightarrow \psi$ から

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \psi\} = \top_{\mathrm{Dom}(\psi)}$$

を得る．すなわち，$\models \psi$ である．証明終わり． ■

補題 3.1.15. 論理式 φ と論理式 ψ に対して，$x \notin \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，次の導出規則は internally valid である：

($\exists$-elim)

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\exists x\varphi \Rightarrow \psi}$$

($\forall$-intro)

$$\frac{\psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \forall x\varphi}$$

□

証明. 変数 $x_1{\in}A_1,\ldots,x_n{\in}A_n,x{\in}A$ を $\{x_1,\ldots,x_n,x\}=\mathrm{Fv}(\varphi\Rightarrow\psi)$ であるものとする．変数 x は ψ において自由出現しないから，$\mathrm{Fv}(\psi)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$ である．このとき，部分対象 m,n を $m:=\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle\mid\varphi\}$，$n:=\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\mid\psi\}$ をとることができる．射影 $\pi:A_1\times\cdots\times A_n\times A\to A_1\times\cdots\times A_n$ をとる．随伴 $\exists_\pi\dashv\pi^{-1}\dashv\forall_\pi$ より，

$$\begin{aligned}m\leq\pi^{-1}(n)\quad&\text{iff}\quad\exists_\pi(m)\leq n,\\ \pi^{-1}(n)\leq m\quad&\text{iff}\quad n\leq\forall_\pi(m)\end{aligned}$$

が成立する．事実 3.1.5 より，

$$\pi^{-1}(n)=\{\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle\mid\psi\}$$

である．事実 3.1.11 (v) より，

$$\begin{aligned}\models\varphi\Rightarrow\psi\quad&\text{iff}\quad m\leq\pi^{-1}(n),\\ \models\psi\Rightarrow\varphi\quad&\text{iff}\quad\pi^{-1}\leq m\end{aligned}$$

である．以上より，（∃-elim）と（∀-intro）は internally valid である．証明終わり． ■

補題 3.1.16. 自由変数 $x{\in}A$ をもつ論理式 φ と項 $t{\in}A$ に対して，次の導出規則は internally valid である：

(Subst)

$$\frac{\varphi}{\varphi[t/x]}$$

□

証明. 事実 3.1.7 と引き戻しが極限を保存することによりよい．証明終わり． ■

補題 3.1.17. 次の等号に関する論理式は internally valid である：

(=-refl)　$\forall x[x=_A x]$;
(=-sym)　$\forall x\forall y[x=_A y\Rightarrow y=_A x]$;
(=-trans)　$\forall x\forall y\forall z[x=_A y\wedge y=_A z\Rightarrow x=_A z]$;
(=-congr-pair)　$\forall x\forall x'\forall y\forall y'[x=_A x'\wedge y=_B y'\Rightarrow\langle x,y\rangle=_{A\times B}\langle x',y'\rangle]$;
(=-congr-f)　$\forall x\forall y[x=_A y\Rightarrow f(x)=_B f(y)]$（$f:A\to B$ は $\mathcal{E}$ の任意の射）． □

証明. 事実 3.1.11 (iii) より，全称量化子を外した論理式について internally valid であることを証明すればよい．

(=-refl)　事実 3.1.9 によりよい．
(=-sym)　事実 3.1.6 によりよい．
(=-trans)　事実 3.1.11 (v) より，

$$\begin{aligned}&\models x=_A y\wedge y=_A z\Rightarrow x=_A z\\ \text{iff}\quad&\{\langle x,y,z\rangle\mid x=_A y\}\wedge\{\langle x,y,z\rangle\mid y=_A z\}\leq\{\langle x,y,z\rangle\mid x=_A z\}\end{aligned}$$

である．$A \times A \times A$ から第 i 成分への射影をそれぞれ $\pi_i : A \times A \times A \to A$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると，等号に関する論理式の表現から，

$$\begin{aligned}
\{\langle x, y, z\rangle \mid x =_A y\} &= \langle \pi_1, \pi_2\rangle^{-1}(\Delta_A) =: M, \\
\{\langle x, y, z\rangle \mid y =_A z\} &= \langle \pi_2, \pi_3\rangle^{-1}(\Delta_A) =: N, \\
\{\langle x, y, z\rangle \mid x =_A z\} &= \langle \pi_1, \pi_3\rangle^{-1}(\Delta_A) =: L
\end{aligned}$$

であった．次を示せば良い：

$$M \wedge N \leq L.$$

いま次の可換（引き戻し正方）図式がある：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "a"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\Delta_A"] \\
A \times A \times A \arrow[r, "\langle \pi_1, \pi_2\rangle"'] & A \times A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "b"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\Delta_A"] \\
A \times A \times A \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_3\rangle"'] & A \times A,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \wedge N \arrow[r, tail, "q"] \arrow[d, tail, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & N \arrow[d, tail, "n"] \\
M \arrow[r, tail, "m"'] & A \times A \times A.
\end{tikzcd}$$

とくに，$mp = nq$ である．次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd}
M \wedge N \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "ap"] \arrow[ddr, tail, bend right, "mp=nq"'] & & \\
& L \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\Delta_A"] \\
& A \times A \times A \arrow[r, "\langle \pi_1, \pi_3\rangle"'] & A \times A
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，

$$\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp = \Delta_A ap$$

を示せば良い．$A \times A$ から第 j 成分への射影をそれぞれ $\Pi_j : A \times A \to A$ $(j = 1, 2)$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\pi_1 m = \Pi_1\langle \pi_1, \pi_2\rangle m = \Pi_1 \Delta_A a = a = \Pi_2 \Delta_A a = \Pi_2 \langle \pi_1, \pi_2\rangle m = \pi_2 m, \\
&\pi_3 n = \Pi_2\langle \pi_2, \pi_3\rangle n = \Pi_2 \Delta_A b = b = \Pi_2 \Delta_A b = \Pi_2 \langle \pi_2, \pi_3\rangle n = \pi_3 n.
\end{aligned}$$

である．従って，

$$ap = \pi_1 mp = \pi_2 mp = \pi_2 nq = \pi_3 nq = bq$$

であり，

$$\begin{aligned}
\Pi_1\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp &= \pi_1 mp = ap \\
\Pi_2\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp &= \Pi_2\langle \pi_1, \pi_3\rangle nq = \pi_3 nq = bq = ap
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp = \Delta_A ap$$

である．以上より，$M \wedge N \leq L$ を得る．

(=-congr-pair)　事実 3.1.11 (v) より，

$$\begin{aligned} &\models x =_A y \wedge y =_A y' \Rightarrow \langle x, y\rangle =_{A\times B} \langle x', y'\rangle \\ \text{iff}\quad &\{\langle x, x', y, y'\rangle \mid x =_A x'\} \wedge \{\langle x, x', y, y'\rangle \mid y =_A y'\} \\ &\leq \{\langle x, x', y, y'\rangle \mid \langle x, x'\rangle =_{A\times B} \langle y, y'\rangle\} \end{aligned}$$

である．$A\times A\times B\times B$ から第一，第二成分への射影をそれぞれ $\pi_i : A\times A\times B\times B \to A$ $(i = 1, 2)$，第三，第四成分への射影をそれぞれ $\pi_i : A\times A\times B\times B \to B$ $(i = 3, 4)$ とすると，等号に関する論理式の表現から，

$$\begin{aligned} &\{\langle x, x', y, y'\rangle \mid x =_A x'\} = \langle \pi_1, \pi_2\rangle^{-1}(\Delta_A) =: M, \\ &\{\langle x, x', y, y'\rangle \mid y =_B y'\} = \langle \pi_3, \pi_4\rangle^{-1}(\Delta_B) =: N, \\ &\{\langle x, x', y, y'\rangle \mid \langle x, x\rangle =_{A\times B} \langle y, y'\rangle\} = \langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle^{-1}(\Delta_{A\times B}) =: L \end{aligned}$$

であった．次を示せば良い：

$$M \wedge N \leq L.$$

いま次の可換（引き戻し正方）図式がある：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "a"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\Delta_A"] \\ A\times A\times B\times B \arrow[r, "\langle \pi_1, \pi_2\rangle"'] & A\times A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "b"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\Delta_B"] \\ A\times A\times B\times B \arrow[r, "\langle \pi_3, \pi_4\rangle"'] & A\times A, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M\wedge N \arrow[r, tail, "q"] \arrow[d, tail, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & N \arrow[d, tail, "n"] \\ M \arrow[r, tail, "m"'] & A\times A\times B\times B. \end{tikzcd}$$

とくに，$mp = nq$ である．次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd} M\wedge N \arrow[drr, bend left, "\langle ap, bq\rangle"] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr, bend right, tail, "mp=nq"'] & & \\ & L \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A\times B \arrow[d, tail, "\Delta_{A\times B}"] \\ & A\times A\times B\times B \arrow[r, "\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle"'] & (A\times B)\times(A\times B) \end{tikzcd}$$

に注意すれば，

$$\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle mp = (\Delta_{A\times B})\langle ap, bq\rangle$$

を示せば良い．(=-trans) の場合と同様にして，

$$\begin{aligned} &\pi_1 m = a = \pi_2 m, \\ &\pi_3 n = b = \pi_4 n \end{aligned}$$

を得る．$(A\times B)\times(A\times B)$ から第 i 成分への射影をそれぞれ Π_i $(i = 1, 2)$ と書き，$A\times B$ から第 j 成分への射影をそれぞれ λ_j $(j = 1, 2)$ と書くと，

$$\begin{aligned} &\lambda_1\Pi_1\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle mp = \lambda_1\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp = \pi_1 mp = ap, \\ &\lambda_2\Pi_1\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle mp = \lambda_2\langle \pi_1, \pi_3\rangle mp = \pi_3 mp = \pi_3 nq = bq, \\ &\lambda_1\Pi_2\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle mp = \lambda_1\langle \pi_2, \pi_4\rangle mp = \pi_2 mp = ap, \\ &\lambda_2\Pi_2\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle, \langle \pi_2, \pi_4\rangle\rangle mp = \lambda_2\langle \pi_2, \pi_4\rangle mp = \pi_4 mp = \pi_4 nq = bq \end{aligned}$$

である．よって，

$$\langle\langle\pi_1,\pi_3\rangle,\langle\pi_2,\pi_4\rangle\rangle mp = (\Delta_{A\times B})\langle ap, bq\rangle$$

である．以上より，$M\wedge N\le L$ を得る．

(=-congr-f)　$f: A\to B$ を $\mathcal{E}$ の任意の射とする．事実 3.1.11 (v) より，

$$\begin{aligned} &\models x =_A y \Rightarrow f(x) =_B f(y) \\ \text{iff}\quad &\{\langle x,y\rangle \mid x =_A y\} \le \{\langle x,y\rangle \mid f(x) =_B f(y)\} \end{aligned}$$

である．等号に関する論理式の表現から，

$$\begin{aligned} &\{\langle x,y\rangle \mid x =_A y\} = \Delta_A, \\ &\{\langle x,y\rangle \mid f(x) =_B f(y)\} = (f\times f)^{-1}(\Delta_B) \end{aligned}$$

であった．$(f\times f)\Delta_A = \Delta_B f$ に注意すると，次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr, bend right, tail, "\Delta_A"'] & & \\
& (f\times f)^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "\Delta_B"] \\
& A\times A \arrow[r, "f\times f"'] & B\times B.
\end{tikzcd}$$

により，

$$\Delta_A \le (f\times f)^{-1}(\Delta_B)$$

を得る．

証明終わり．■

定理 3.1.18 (健全性 [7, Theorem 3.16]). $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の intuitionistically provable な論理式は，internally valid である．□

証明. 補題 3.1.12, 補題 3.1.13, 補題 3.1.14, 補題 3.1.15, 補題 3.1.16, 補題 3.1.17 による．証明終わり．■

3.2　文脈を明示した内部言語

内部言語の構文と解釈を以下の三点について拡張する．

(i) 前節での構文と証明体系は, formula に出現する自由変数の文脈を明示していなかった．これを明示することで restricted modus ponens をより明快な推論規則に分解する．また, 量化子についての規則が文脈を移動する規則であることも見やすくなる．

(ii) 証明可能性を論理式に対してではなく, 文脈と論理式の間の関係であるシークエントに対して述べるようにする．シークエントの解釈は部分対象の間の射となり, 随伴による性質の記述がしやすくなり, 証明系の拡張も容易になる．

(iii) トポス $\mathcal{E}$ での Ω への射を全て述語記号として追加する．

3.2.1 構文

定義 3.2.1 (変数 (variable)). 変数の構文変数には x, y などの文字を用いる．変数は少なくとも可算無限個存在することにする． $\lozenge$

定義 3.2.2 (型（type）). 型の構文変数には A, B などの文字を用いる．

$$A \text{ が型である} \overset{def}{\iff} A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E}). \qquad \lozenge$$

定義 3.2.3 (文脈（context）). 文脈の構文変数には Γ, Δ などの文字を用いる．

$$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, x{\in}A.$$

文脈には変数が重複して出現しないものとする．すなわち $\Gamma, x{\in}A$ において Γ に x は出現しないことにする． $\lozenge$

定義 3.2.4 (項（term）). 項の構文変数には t, u などの文字を用いる．

$$\begin{aligned} t, u ::= {} & x \\ & \mid * \\ & \mid f(t) \quad \text{ただし } f \in \mathrm{Arr}(\mathcal{E}) \\ & \mid \langle t, u \rangle. \end{aligned} \qquad \lozenge$$

定義 3.2.5 (略記法).

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &:= t; \\ \langle t_1, \ldots, t_{n+1} \rangle &:= \langle \langle t_1, \ldots, t_n \rangle, t_{n+1} \rangle; \\ f(t_0, \ldots, t_n) &:= f(\langle t_0, \ldots, t_n \rangle); \\ A_1 \times \cdots \times A_{n+1} &:= (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}. \end{aligned} \qquad \lozenge$$

定義 3.2.6 (項の型付け). 文脈 Γ のもとで項 t に型 A がついている，という関係 $\Gamma \vdash t{\in}A$ を，以下の推論規則で帰納的に定義する．

$$\frac{\Gamma \ni (x{\in}A)}{\Gamma \vdash x{\in}A}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash *{\in}1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t{\in}A \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)}{\Gamma \vdash f(t){\in}B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t{\in}A \qquad \Gamma \vdash u{\in}B}{\Gamma \vdash \langle t, u \rangle{\in}A \times B}$$

$\lozenge$

定義 3.2.7 (論理式 (formula)). 論理式の構文変数には φ, ψ などの文字を用いる.

$$\begin{aligned}\varphi, \psi ::= &\ \langle\ \text{原子論理式}\ \rangle \\ &\mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \\ &\mid \forall x{\in}A\varphi \mid \exists x{\in}A\varphi.\end{aligned}$$

原子論理式は以下のものである.

- $t =_A u$;
- $\top, \bot$;
- $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A_1 \times \cdots \times A_n, \Omega)$ であり, かつ任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $\Gamma \vdash t_i{\in}A_i$ がなりたつとき,
$$p(t_1, \ldots, t_n).$$ ◊

定義 3.2.8 (canonical context). φ の自由変数がちょうど全て出現し, φ に出現する項が全て型付けられる文脈を, φ の canonical context と呼ぶ. ◊

事実 3.2.9. canonical context は並べかえを除いて各 φ に対して一意に定まる. □

定義 3.2.10 (シークエント).「文脈 Γ のもとで論理式の列 Θ から論理式 φ が証明可能である」という関係を $\Theta \underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \varphi$ と表記する. この表記をシークエントと呼ぶ. ただしシークエントを書くときは, いつも, Θ と φ の自由変数が文脈 Γ に全て出現していることにする.

この関係の帰納的な定義は次の小節で与える. ◊

3.2.2　証明系

関係 $\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \phi$ を, 公理と推論規則で帰納的に定義する. これは [7] の証明系をすこし変更したものであり, Θ が空であるようなシークエントのみを扱う.

定義 3.2.11 (証明系). 公理は前節にならうが, 命題論理部分と等号の congruence についてはより使いやすい形の公理系を採用した.

(propositional axioms)　直観主義命題論理の恒真命題 ϕ の命題変数を内部言語の論理式でおきかえて得られる論理式 ϕ' について, $\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \phi'$;

($\exists$-intro)　$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \varphi \Rightarrow \exists x{\in}A\varphi$;

($\forall$-elim)　$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \forall x{\in}A\varphi \Rightarrow \varphi$;

(=-refl)　$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \forall x{\in}A[x =_A x]$;

(=-sym)　$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \forall x{\in}A\forall y{\in}A[x =_A y \Rightarrow y =_A x]$;

(=-trans)　$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \forall x{\in}A\forall y{\in}A\forall z{\in}A[x =_A y \wedge y =_A z \Rightarrow x =_A z]$;

(=-congr)　項 t について $\Gamma, x : A \vdash t{\in}B$ であるとき,

$$\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\text{---}} \forall x{\in}A\forall y{\in}A[(x =_A y) \Rightarrow (t =_B t[y/x])].$$

前節の体系での制限された modus ponens (RMP) は, 構造規則 weakening, contraction, exchange と, 文脈をそろえた modus ponens とに分解される. 規則の付帯条件としては

明記していないが, シークエントを定義したときの規約により, weakening における φ には x が自由出現しない.

(weakening)

$$\frac{\vdash_{\Gamma} \varphi}{\vdash_{\Gamma, x\in A} \varphi}$$

(contraction)

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x\in A, y\in A} \varphi}{\vdash_{\Gamma, x\in A} \varphi[x/y]}$$

(exchange)

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x\in A, y\in B, \Delta} \varphi}{\vdash_{\Gamma, y\in B, x\in A, \Delta} \varphi}$$

(fiberwise MP)

$$\frac{\vdash_{\Gamma} \varphi \qquad \vdash_{\Gamma} \varphi \Rightarrow \psi}{\vdash_{\Gamma} \psi}$$

量化子と代入に関する規則は前節と同様であるが, やはりシークエントについての規約により, ($\exists$-elim),($\forall$-intro) において, ψ には x が自由出現しない.

($\exists$-elim)

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x\in A} \varphi \Rightarrow \psi}{\vdash_{\Gamma} \exists x{\in}A\varphi \Rightarrow \psi}$$

($\forall$-intro)

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x\in A} \psi \Rightarrow \varphi}{\vdash_{\Gamma} \psi \Rightarrow \forall x{\in}A\varphi}$$

(subst)　$\Gamma \vdash t{\in}A$ と型付けられた項 t について,

$$\frac{\vdash_{\Gamma, x\in A} \varphi}{\vdash_{\Gamma} \varphi[t/x]}$$

$\Diamond$

この証明系が前節の証明系に対して完全であることを示したいが, ほとんどの公理と規則は前節の対応する公理や規則を強めている. 唯一の例外は (fiberwise MP) である. これは (RMP) より一見弱いが, 構造規則を用いることで (RMP) 相当の機能を持つ.

補題 3.2.12. φ, ψ を論理式とし, $\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ を満たしているものとする. また, $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ を, $\varphi, \psi, (\varphi \Rightarrow \psi)$ それぞれの canonical context とする. このとき, $\underset{\Gamma''}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi \Rightarrow \psi$ と $\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi$ がなりたつならば, $\underset{\Gamma'}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \psi$ もなりたつ. □

証明. canonical context の定義より, Γ'' は Γ および Γ' を含む. まず (weakening) により, $\underset{\Gamma}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi$ から $\underset{\Gamma''}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi$ が得られる. (fiberwise MP) により, $\underset{\Gamma''}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \psi$ が得られる. $\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ より, Γ' と Γ'' は並べ替えを除いて同じであるので, (exchange) により $\underset{\Gamma'}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \psi$ が得られる. *3 ■

したがって, 本節の証明系が前節と比べても証明能力が減っていないことがわかった.

定理 3.2.13. φ を論理式, Γ を φ の canonical context とする. このとき,

$$\vdash \varphi \text{ ならば } \underset{\Gamma}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi.$$

□

3.2.3 内部解釈と健全性

上記の構文に対して内部解釈を定義し, 証明系について健全性を証明する.

以下, 文脈 $\Gamma = x_1{\in}A_1, \ldots, x_m{\in}A_m$ と, 対象 $A_1 \times \cdots \times A_m$ を同一視し, 「Γ の部分対象」とか「$\mathrm{Sub}(\Gamma)$」といった言いかたを用いる. また, 前節で導入した, 文脈付きで項と論理式を解釈する記法 $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto t\}$ と $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi\}$ を引き続き用いる. ただし, 論理式の定義に述語記号を加えたので, その解釈を追加する.

定義 3.2.14. $\Gamma = x_1{\in}A_1, \ldots, x_m{\in}A_m$, $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A_1 \times \cdots \times A_n, \Omega)$ とする. $\Gamma \vdash t_i{\in}A_i$ を満たす項 t_i たちについて, $\{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \mid p(t_1, \ldots, t_n)\}$ は,

$$p \circ \{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \mapsto \langle t_1, \ldots, t_n\rangle\}$$

を classifying morphism とする Γ の部分対象とする.

$$\{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \mid p(t_1, \ldots, t_n)\} := (p \circ \{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \mapsto \langle t_1, \ldots, t_n\rangle\})^{-1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{true}} \\ \Omega \end{array} \right)$$

◊

論理式 φ が internally valid であるとは, $\|\varphi\|$ が true を経由して分解されることであった. これは, ハイティング代数 $\mathrm{Sub}(\mathrm{Dom}(\varphi))$ において, $\|\varphi\|$ の classify する部分対象が, 最大元 $\top_{\mathrm{Dom}(\varphi)}$ 以上であることと言いかえることができる. シークエントの正しさはこの言いかえを基にして定義する.

定義 3.2.15. $\Gamma = x_1{\in}A_1, \ldots, x_m{\in}A_m$, $\Theta = \psi_1, \ldots, \psi_n$ とする. このときシークエント $\Theta \underset{\Gamma}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi$ が正しいということを

$$\models \Theta \underset{\Gamma}{\vdash\!\!\!\longrightarrow} \varphi$$

---

*3 本稿では導入していないが, [7] では (RMP) よりも強い (RMP') なる規則も提案されている. これも (fiberwise MP), (weakening), (exchange), (contraction) から導出できる.

と表記し, 以下のように定義する.

$$\models \Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{\langle x_1, \ldots, x_m \rangle \mid \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n\} \leq \{\langle x_1, \ldots, x_m \rangle \mid \varphi\}.$$

ただし $\leq$ は $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ での大小関係, すなわち, 部分対象の間にモノ射があるという関係である. ◊

定義より, シークエントの正しさの概念は internal validity を含む.

事実 3.2.16. Γ を φ の canonical context とする. このとき,

$$\models \ \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi \quad \text{iff} \quad \models \varphi.$$

□

健全性証明のため, 以下の事実を認めることにする.

補題 3.2.17. 前節の証明系の命題論理部分, すなわち ($\top$-intro), (K), (S), ($\wedge$-intro), ($\wedge$-elim), ($\vee$-intro), ($\vee$-elim), ($\neg$-intro), ($\neg$-elim), ($\perp$-elim), (RMP) は, 直観主義命題論理のトートロジーを全て証明する. □

健全性の主張は以下のように述べられ, 前節の結果を用いて証明される.

定理 3.2.18 (健全性). φ を論理式, Γ を文脈とする. このとき,

$$\underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi \text{ ならば } \models \ \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi.$$

□

証明. φ の canonical context を Δ とする. 以下, $\underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi$ の導出についての帰納法を行なう. 各場合について, $\models \ \underset{\Delta}{\longmapsto} \varphi$ が得られれば, 事実 3.1.10 により $\models \ \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi$ が得られることに注意しておく.

(propositional axioms) 補題 3.2.17 と補題 3.1.12 によって, $\models \ \underset{\Delta}{\longmapsto} \varphi$ が得られる.

($\exists$-intro),($\forall$-elim),(=-refl),(=-sym),(=-trans) 定理 3.1.18 によって, $\models \ \underset{\Delta}{\longmapsto} \varphi$ が得られる.

(=-congr) この場合に扱う論理式は, $\forall x{\in}A \forall y{\in}A[(x =_A y) \Rightarrow (t =_B t[y/x])]$ である. t の構造について帰納法を行い, 各ステップで補題 3.1.17 を適用すれば, $\models \ \underset{\Delta}{\longmapsto} \varphi$ が得られる.

(weakening) 事実 3.1.10 による.

(contraction) 射影 $A \times A \to A$ がエピ射であることに注意しつつ事実 3.1.7 と事実 3.1.10 を適用する.

(exchange) 事実 3.1.7 による.

(fiberwise MP) $\|\varphi \Rightarrow \psi\|, \|\varphi\|, \|\psi\|$ と, Γ からそれぞれの canonical context への射影との合成が classify する Γ の部分対象をそれぞれ S, T, U とする.
帰納法の仮定より, $\top_\Gamma \leq S$ および $\top_\Gamma \leq T$ であるが, 定義 3.1.3 と, ハイティング代数の cartesian closedness より, $\top_\Gamma \leq S$ は $T \leq U$ と同値である. $\leq$ の推移性より, $\top_\Gamma \leq U$ を得るが, これは求めていた $\models \ \underset{\Gamma}{\longmapsto} \psi$ と同値である.

($\exists$-elim) $\|\varphi \Rightarrow \psi\|, \|\varphi\|, \|\psi\|$ と, $\Gamma, x{\in}A$ からそれぞれの canonical context への射影との合成が classify する $\Gamma, x{\in}A$ の部分対象を S, T, U とする. また,$\|\exists x{\in}A\varphi \Rightarrow$

$\psi\|, \|\exists x{\in}A\varphi\|, \|\psi\|$ と, Γ からそれぞれの canonical context への射影との合成が classify する Γ の部分対象を S', T', U' とする.

定義 3.1.3 と, ハイティング代数の cartesian closedness より, $\top_{\Gamma,x\in A} \leq S$ は $T \leq U$ と同値である. シークエントを書くときの規約より, ψ には x が出現していない. よって $\Gamma, x{\in}A$ から Γ への射影を π とすると, U の classifying map は π を経由して分解し, $U = \pi^{-1}(U')$ である. よって $T \leq U$ は $T \leq \pi^{-1}(U')$ と同値であり, さらに随伴 $\exists_\pi \dashv \pi^{-1}$ より, $\exists_\pi(T) \leq U'$ と同値である. 定義 3.1.3 より $T' = \exists_\pi(T)$ であるから, $T' \leq U'$ と同値, さらに cartesian closedness より $\top_\Gamma \leq S'$ とも同値である. よって $\models \ \underset{\Gamma}{\vdash} \ \exists x{\in}A\varphi \Rightarrow \psi$ が得られた.

(∀-intro) (∃-elim) と同様である.

(subst) 事実 3.1.7 による. ■

3.3 その他の証明系

トポスについての証明系はさらに拡張できる. 特に本稿で扱った証明系は一階の論理のためのものであり, これはトポスの内部論理（圏論的集合論あるいは高階論理）を扱うには弱い. 一方で証明系のスタイルとして, 本稿は Osius [7] によるヒルベルト流のものに従った. 一階の論理の形式化はもちろん他にもあり, 文献ごとに多彩な証明系が見られる.

Johnstone [6], Lambek and Scott [14] では, Θ が単一の論理式であるようなシークエントに対する証明系が定義されている.

(initial)

$$\frac{}{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi}$$

(weakening)

$$\frac{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}{\varphi \underset{\Gamma,x\in A}{\vdash} \psi}$$

(substitution)

$$\frac{\varphi \underset{\Gamma,x\in A}{\vdash} \psi \qquad \Gamma \vdash t{\in}A}{\varphi[t/x] \underset{\Gamma}{\vdash} \psi[t/x]}$$

(cut)

$$\frac{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi \qquad \psi \underset{\Gamma}{\vdash} \chi}{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \chi}$$

(⊤-right)

$$\frac{}{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \top}$$

(⊥-left)

$$\frac{}{\bot \vdash_{\Gamma} \varphi}$$

(∧-right)

$$\frac{\chi \vdash_{\Gamma} \varphi \qquad \chi \vdash_{\Gamma} \psi}{\chi \vdash_{\Gamma} \varphi \wedge \psi}$$

(∧-left1)

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash_{\Gamma} \varphi}$$

(∧-left2)

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash_{\Gamma} \psi}$$

(∨-left)

$$\frac{\varphi \vdash_{\Gamma} \chi \qquad \psi \vdash_{\Gamma} \chi}{\varphi \vee \psi \vdash_{\Gamma} \chi}$$

(∨-right1)

$$\frac{}{\varphi \vdash_{\Gamma} \varphi \vee \psi}$$

(∨-right2)

$$\frac{}{\psi \vdash_{\Gamma} \varphi \vee \psi}$$

(∧-⇒)

$$\frac{\varphi \wedge \psi \vdash_{\Gamma} \chi}{\varphi \vdash_{\Gamma} \psi \Rightarrow \chi}$$

(∀-right)

$$\frac{\psi \vdash_{\Gamma, x \in A} \varphi}{\psi \vdash_{\Gamma} \forall x{\in}A\varphi}$$

(∃-left)

$$\frac{\varphi \vdash_{\Gamma, x \in A} \psi}{\exists x{\in}A\varphi \vdash_{\Gamma} \psi}$$

二重線で書かれた規則は上下を入れかえても規則であり, これらの規則は随伴によって得られるものであるということが, シークエントの両側に論理式を配置することで見やすくなっている.

Jacobs [3] では, Θ に複数の論理式をゆるすことにして, 自然演繹を定義している.

(initial)

$$\frac{}{\varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi}$$

(cut)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi \qquad \Theta', \varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}{\Theta, \Theta' \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}$$

(weakening for propositions)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}{\Theta, \varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}$$

(contraction for propositions)

$$\frac{\Theta, \varphi, \varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}{\Theta, \varphi \underset{\Gamma}{\vdash} \psi}$$

(exchange for propositions)

$$\frac{\Theta, \varphi, \psi, \Theta' \underset{\Gamma}{\vdash} \chi}{\Theta, \psi, \varphi, \Theta' \underset{\Gamma}{\vdash} \chi}$$

(weakening for types)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi}{\Theta \underset{\Gamma, x \in A}{\vdash} \varphi}$$

(contraction for types)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma, x \in A, y \in A}{\vdash} \varphi}{\Theta[x/y] \underset{\Gamma, x \in A}{\vdash} \varphi[x/y]}$$

(substitution)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma, x \in A}{\vdash} \varphi \qquad \Gamma \vdash t \in A}{\Theta[t/x] \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi[t/x]}$$

($\top$-intro)

$$\frac{}{\Theta \underset{\Gamma}{\vdash} \top}$$

($\bot$-elim)

$$\frac{}{\Theta, \bot \underset{\Gamma}{\vdash} \varphi}$$

(∧-intro)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \qquad \Theta \vdash_{\Gamma} \psi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \wedge \psi}$$

(∧-elim1)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \wedge \psi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi}$$

(∧-elim2)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \wedge \psi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \psi}$$

(∨-intro1)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \vee \psi}$$

(∨-intro2)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \psi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \vee \psi}$$

(∨-elim) [*4]

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \vee \psi \qquad \Theta, \varphi \vdash_{\Gamma} \chi \qquad \Theta, \psi \vdash_{\Gamma} \chi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \chi}$$

(⇒-intro)

$$\frac{\Theta, \varphi \vdash_{\Gamma} \psi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \Rightarrow \psi}$$

(⇒-elim)

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma} \varphi \Rightarrow \psi \qquad \Theta \vdash_{\Gamma} \varphi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \psi}$$

(∀-intro)　x が Θ に自由出現しないとき，

$$\frac{\Theta \vdash_{\Gamma, x \in A} \varphi}{\Theta \vdash_{\Gamma} \forall x{\in}A\varphi}$$

(∀-elim)

[*4] [3] でのこの規則は，$\varphi \vee \psi$ を結論部のシークエントの左辺に入れている．

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \forall x{\in}A\varphi \qquad \Gamma \vdash t{\in}A}{\Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi[t/x]}$$

(∃-intro)

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \varphi[t/x] \qquad \Gamma \vdash t{\in}A}{\Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \exists x{\in}A\varphi}$$

(∃-elim) x が Ξ, ψ に自由出現しないとき,

$$\frac{\Theta \underset{\Gamma}{\longmapsto} \exists x{\in}A\varphi \qquad \Xi, \varphi \underset{\Gamma, x\in A}{\longmapsto} \psi}{\Theta, \Xi \underset{\Gamma}{\longmapsto} \psi}$$

ここまでの証明系は本稿で定義した構文および解釈の枠内で理解することができる．[*5]

トポスの内部論理を実用に用いる際, すなわち内部言語で部分対象を記述し内部論理の規則で証明を行うようなときに, 結局どの規則を使ってよいのか, 悪いのかという悩みが生じることがある．実のところこの悩みが本稿の出発点であり, 構文論的に使える規則を整理し, 意味論的に健全性を証明し, 通常の一階述語論理との差異をあきらかにするという動機があった．

この悩みは二つの面から解決された．まずはここまで紹介した推論規則について,（足りていない健全性証明をきちんと書き下すべきではあるが, それが済んだとして,）重複をいとわず全てを採用することにすると, 一階述語論理でふつう用いられる証明系の多くの規則を, トポスの内部論理においても問題なく使用できることが担保される．いやらしく言えば, 証明の際に使える規則が多いのは便利なことである．

もう一方の面として, トポスの内部論理における落し穴, すなわち通常の一階述語論理と内部論理の一階述語論理部分との違いが, 証明系を整理することで認識できる．その違いは以下の (RMP) 規則に集約されている．第 1 節の公理や規則を見れば, この (RMP) だけが相違点であることがわかるだろう．

(RMP) 論理式 φ と論理式 ψ に対して，$\mathrm{Fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fv}(\psi)$ であるとき，

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

この restricted modus ponens に対して, 自由変数についての条件をなくしたものを制限されない modus ponens と呼ぼう．制限されない modus ponens を用いると, 以下の推論が可能になる．

$$\frac{x =_A x \qquad x =_A x \Rightarrow \exists x(x =_A x)}{\exists x(x =_A x)}$$

この推論において仮定部は両方とも公理のインスタンスであり internally valid だが, 結論部は A が始対象 0 であると正しくない．この問題はトポスの論理が multi-sorted であり, しかも sort の一つとして始対象, すなわち空の domain of discourse をゆるすため, 部分的に free logic [13] のような体系を考えなければいけないことに起因している．前節

[*5] 本節で導入した規則について健全性を示して, その証明は前節までと同様の方法を用いて遂行できる．

における変数の文脈の導入, および構造規則と (fiberwise MP) の採用は, 制限されない modus ponens を回避するための別解でもあった.

その他 Fourman [12], Goldblatt [10] などにおいては, 制限されない modus ponens の失敗を回避するためのさらに別の方法として, domain of discourse が空でないことを保証するための, 存在述語 **E** を導入するという方法が述べられている.

参考文献

[1] S. マックレーン, 『圏論の基礎』（三好博之／高木 理 訳）, シュプリンガー・ジャパン, 2005.

[2] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992.

[3] B. Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*, Elsevier, 1999.

[4] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, Dover Publication, 2014.

[5] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium Volume 1*, Clarendon Press, 2002.

[6] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium Volume 2*, Clarendon Press, 2002.

[7] G. Osius, *Logical and Set-theoretical tools in elementary topoi*, 1975.

[8] J L. Bell, *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs*, 3rd ed., Oxford University Press, 2005.

[9] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 3—Categories of Sheaves*, Cambridge University Press, 1994.

[10] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, Dover Publication, 2006.

[11] J. Barwise, *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing, 1977.

[12] M.P. Fourman, *The logic of topoi* in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 90, pp.1053-1090, 1977.

[13] K. Lambert, *Free Logic: Selected Essays*, Cambridge University Press, 2003.

[14] J. Lambek and P. J. Scott, *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press, 1988.

淡中 圏　本名：田中健策　世の中をよく分からないもので溢れかえらせて混乱させようとしています。

世界を革命するために！

よく分からないブログ　`http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/`

よく分からない twitter　`https://twitter.com/tannakaken`

よく分からないサイト（準備中）　`https://tannakaken.xyz`

鈴木 佑京　　ぽよぽよー。ぽよぽよー。やりたいことに対して時間とやる気が足りないぽよぽよー。よー。

才川 隆文　この下の奥付の位置, 正しい決め方がわからず毎回そのとき限りの見た目で決めています. 正しくはどうやるんでしょう？なお今回は 170.71652pt 分の vspace を入れています.

古賀 実　今回も本を厚くするお仕事をしました.

編集後記: 今度こそ、できないかと思ったよ。マジで。

でもちゃんと本が出来てくるから偉いもんだ。この本を作って売ったからって、就職できたり出世できたりするわけでもないのにね。みんなポストについたり就職したり転職したり、いろいろあって忙しいはずなのに。

好きなんだなあ。

数学はいいぞ！

【淡中 圏】

発行者 ： The dark side of Forcing

連絡先 ： http://forcing.nagoya

発行日 ： 2016 年 12 月 31 日

Here is the math
to the dark side