The Dark Side of Forcing

vol. 6

この本を手にとってくれた君へ

淡中　圏

コミケのいいところは紙に印刷できるものならおよそありとあらゆるものが売ってるところだ。まさに人類の知識ネットワークの縮図だ。しかし、多くの人がここをそうは思ってない。どう思っているかは別に説明する必要はないんだよね。ま、人類の知識ネットワークの大半はこんな感じなんだな、って意味では実は間違ってないのかも知れんが。

君がどんな目的でここを訪れているかは僕は知らない。この奇妙な冊子を手に取る理由なんて分かるわけもない。文章を書くときはそれを読む人がどんな人たちなのかある程度想定しておくべきだと思うけど、この同人誌に限ってはどうにも想像できない。

その僕の想像を超えた君に向けてこの冊子は書かれている。その想像を超えた君に知っておいて欲しいことは、この世界には君の知らないものや思いもよらないものが満ち満ちているってこと。もしかしたらコミケで数学の同人誌を売っているなんてことがすでに君の想像を超えているかもしれない。でもそれってすごく嬉しいことだと僕は思う。

同人仲間もみんなだんだん忙しくなって、この同人誌も正直岐路に立たされている。この本が実際にコミケで売られるのかどうかもこの文章を書いている時点では結構微妙。でも、やっぱこういう変でどうでもいいこと考えてる連中がいるってことをちょっとでも宣伝することに、結構意味を感じてるから、やめるって選択肢はないんだ。作り方は変えていかなくちゃいけないかも知れないけど。

変な奴らがいるってことを喜べる心性、自分と違う人達を寿げる心持ちってのは想像力の根幹なんだ。教育に関わる仕事をしたりして、想像力の大切さと危機にすごく思い至った。想像力がなくなると、この世界に自分以外の人間がいるってことすら僕らは忘れちゃうんだ。みんな第一印象ですぐに「自分には関係ない」「自分には合わない」って壁を作る。それこそ自分とは違う人間がそこにいる証拠で、それこそ面白さの震源の徴なのに。もったいない。何の話をしてるって？　数学の話をしてるんだよ。

別にこの本は隅から隅まで完全に理解して欲しくて書いてるわけじゃない。書いている本人たちだって、別に隅から隅まで理解しているわけじゃない。ただ、これを書いている人はみんな「自分には分からない」ってことを面白がってる。もちろん分かりたいけど、そんなすぐに理解できるようなことはもう大して面白くないんだ。一生かけても理解しきれないようなことを少しずつでいいから理解していくのが嬉しくて仕方ないんだ。

だからこの本を読む人に求めたいのは、理解することじゃない。全然わかんなくったってかまわない。ただわからないことを面白がっている様子を君らに見せつけて、自慢したいんだ。そしてその雰囲気を感じて、出来れば仲間になってほしい。わからないことを一生かけて理解しようとする物好きの。

目次

第 1 章

双曲線関数を作る
—高校生でも分かる天下りなしの数学と数学における DIY 精神—

淡中　圏

$\int \sqrt{1+x^2}dx$ の解き方という高校数学の範囲を超えた質問を高校生から受けたのだが、あまり大層な道具を使うわけではないので、できる限り高校数学の範囲から始めて、できるだけ天下りな説明を避けて、「なぜそう考えるのか、なぜそうするとうまくいくのか」まで含めて説明しようと思った。これにより、「必要なものは自分で作る」という「DIY 精神」や「何が必要かを考える」という「後ろ向き推論」の大切さを実例によって示したい。具体的には双曲線関数を、まず大雑把な仕様書を書き、その仕様書をどうにか実装しようとする、というプログラミング的手順で、問題を解く。

無いんだったら自分で作ればいいのよ！

涼宮ハルヒ もしくは トワイライト・スパークル

1.1　何が必要か？

積分などで、$\sqrt{1-x^2}$ という部品があると、まず私たちは、$x = \cos\theta$ もしくは $x = \sin\theta$ と変数変換することを考える。なぜなら、三角関数 sin と cos には、

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

という法則があるので、

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

が成り立つうえ、$x = \cos\theta$ なら、

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \quad \text{より} \quad dx = -\sin\theta d\theta$$

となって、変数変換とものすごく相性がいいことが分かる（$x = \sin\theta$ の場合も同様)。

よって、まず下準備として、$\sqrt{1+x^2}$ を変数変換するのにちょうどいい関数を三角関数を見本に[*1]見つける、もしくは作ることから作業を始めよう。

sin と cos が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を $x = \cos\theta$、$y = \sin\theta$ とパラメータ表示するための関数とみなせることを考えると（図 1.1 を参照。こういう意味で、三角関数のことを**円関数**と呼ぶ流儀もある)、今必要なものは、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を $x = f(\theta)$、$y = g(\theta)$ とパラメータ表示する二つの関数で、三角関数のようなよい微分の法則、もう少し具体的に言うとループする微分法則、ぶっちゃけて言ってしまえば $\frac{df}{d\theta} = g, \frac{dg}{d\theta} = f$ のようなループする微分法則や、$f(\theta+\eta)$ を $f(\theta)$ と $f(\eta)$ の簡単な式に表す加法定理などを持つものだ、と言える。

とりあえず、この二つを $x = \cosh\theta$、$y = \sinh\theta$ と書き、それぞれ**ハイパボリック・コサイン**、**ハイパボリック・サイン**、二つ合わせて**双曲線関数**と呼ぶことにする (図 1.2 を参照。hyperbolic で双曲線の意味)。ここまでの考察をリストにまとめよう。

双曲線関数 $\sinh, \cosh$ の満たすべき、満たしてほしい、満たしてくれればうれしい、条件のリスト[*2]

(1) $\sinh^2\theta - \cosh^2\theta = 1$（満たすべき）
(2) ループする微分法則を持つ（例：$\frac{d}{d\theta}\sinh = \cosh, \frac{d}{d\theta}\cosh = \sinh$）（満たしてほしい）
(3) 何らかの加法法則（満たしてくれればうれしい）

こうして方針が定まったので、次はこれを作る番だ。

1.2 条件を満たす関数を作る

これを作るために、とにかく条件 (1)$\sinh^2\theta - \cosh^2\theta = 1$ を満たさないといけないが、これはそんなに難しくない。中学でやった多項式の展開の公式を思い出そう。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

の差を取ると、$4ab$ になるので、$4ab = 1$ がいつも成り立っている関数 $a(\theta)$ と $b(\theta)$ の組を見つけてくれば、$\cosh = a + b$ と $\sinh = a - b$ は条件 (1) を満たす。例えば、どんな関数 $f(\theta)$ を持ってきても、$a = \frac{f}{2}, b = \frac{1}{2f}$ とすれば、$4ab = 1$ を満たす。つまり

$$\cosh\theta = \frac{f(\theta) + \frac{1}{f(\theta)}}{2}, \quad \sinh\theta = \frac{f(\theta) - \frac{1}{f(\theta)}}{2}$$

とすれば、条件 (1) は成り立ってしまう。もっと簡単な例を出すと、たとえ $f(\theta) = \theta$ でも、

$$\cosh\theta = \frac{\theta + \frac{1}{\theta}}{2}, \quad \sinh\theta = \frac{\theta - \frac{1}{\theta}}{2}$$

[*1] 数学はよく似た状況で、すでにうまく働いているものの類似物を作っていくことによって進んでいく。今回はそのいい例である。類似問題を探して目の前の問題を解く手法（**発見的手法、ヒューリスティック**）については、詳しくは [1] にたくさんの例がある。

[*2] これが双曲線関数のいわば**仕様書**である。アブストラクトでも書いたように今回の論考は、プログラミングの「仕様書をまず書き、そのごコーディング」という手順に数学のやり方を引き付けたものだ。必ずしもすべての数学がこのように行われているわけではないが、その一つの側面を拡大しようとしているわけである。

とすれば、条件 (1) は成り立つのだ。しかしこれでは、微分すると第一項が消えてしまい、三角関数のようなループする微分の法則（条件 (2)）は無理である。同様に f が多項式では、微分していけばいつかは第一項が消えるので結局だめだ。もう一方の項の分数関数も微分していくと、消えはしないが、どんどん姿を変えていってしまい、ループはしなさそうだ。

ここで必要なのは、微分しても姿をあまり変えない関数、もっと言えば微分しても全く変わらない関数、微分のループがたったの一回で済んでしまうのであまりループという意識が発生しないが実は微分がループする関数の代表例。何か思いつかないだろうか。

そう**指数関数**である。

上記の $f(\theta)$ に指数関数 e^θ を入れてみよう。

$$\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

すると、$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ はもちろん、

$$\frac{d}{d\theta}\cosh\theta = \sinh\theta, \quad \frac{d}{d\theta}\sinh\theta = \cosh\theta$$

となり、条件 (2) を完璧に満たす。

さらに、

$$\sinh(a+b) = \sinh a\cosh b + \cosh a\sinh b, \quad \cosh(a+b) = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b$$

と三角関数のものにそっくりな加法定理（条件 (3)）まで満たす。このように指数関数を使って作った関数は我々が求めていたものそのもと言ってよく、これを双曲線関数と呼んでよさそうだ[*3]。

この双曲線関数を使うと、指数関数は逆に $e^\theta = \sinh\theta + \cosh\theta$ と書ける。[*4]

なおこの $\cosh\theta$ のグラフはロープや電線などの両端を持って垂らしたときにできる曲線、**懸垂曲線 (カテナリー曲線)** と呼ばれるものになっている[*5]。

1.3　作った関数を使って問題を解いてみる

では、これを使って実際に問題の不定積分を解いてみよう。

まず、$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ かつ、$\cosh\theta > 0$ より、$\sqrt{1+\sinh^2\theta} = \cosh\theta$ となる。ま

---

*3　多くの人には信じられ無いだろうが、数学の世界では指数関数を使って書ける程度の関数は簡単だという認識があるので、この手の関数を**初等関数**と呼ぶ。

*4　大学の数学では、多くの関数を複素数上に拡張するが、そうすると、$e^{i\theta} = \cos\theta = i\sin\theta$ が成り立ち、そこから $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$,　$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2i}$ と逆に書くこともできる。これを知っていると双曲線関数の定義もさらに自然なものに見える。ちなみに、上の式に、π を代入したものがオイラーの公式 $e^{i\pi} = -1$ である。

*5　双曲線関数はほかにも、物理学（紐を吊るした時の懸垂曲線として）、生物学（個体数が増えすぎるとあるところで頭打ちになるロジスティック曲線として）、人工知能（ニューラルネットワークの学習に使うシグモイド曲線として）、など様々なジャンルに顔を出す。

た、$x = \sinh\theta$ とすると、$\frac{dx}{d\theta} = \cosh\theta$ より、$dx = \cosh\theta d\theta$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2\theta}\cosh\theta d\theta \\
&= \int \cosh^2\theta d\theta \\
&= \int \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \frac{e^{2\theta}}{4}d\theta + \int \frac{1}{2}d\theta + \int \frac{e^{-2\theta}}{4}d\theta \\
&= \frac{e^{2\theta}}{8} - \frac{e^{-2\theta}}{8} + \frac{\theta}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
&= \frac{\sinh 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

ここで先ほどの加法定理を使うと、$\sinh 2\theta = 2\cosh\theta\sinh\theta$ となる。また $\sinh\theta = x$ なら、$\cosh\theta = \sqrt{1+x^2}$ となることを確認し、さらに $\cosh\theta + \sinh\theta = e^\theta$ より、

$$\theta = \log_e(\cosh\theta + \sinh\theta) = \log_e(x + \sqrt{1+x^2})$$

となることも、対数関数が指数関数の逆関数であることから分かる。これらのことを使うと、

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} &= \frac{\sinh\theta\cosh\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e(x + \sqrt{1+x^2})\}
\end{aligned}$$

となる。

結局結論として、

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e(x + \sqrt{1+x^2})\} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が分かった ([3] にはより一般の公式が載っている)。

また、同様の計算で双曲線関数の面白い特徴づけができる。

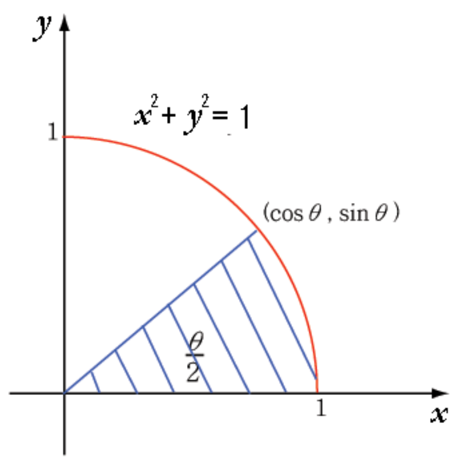


図 1.1　円のパラメータ表示 [2] より変数を改変して引用

原点を O とし、単位円上の点 $A=(\cos\theta,\sin\theta)$ をとると、OA と x 軸と円の弧に囲まれた図形の面積は $\frac{\theta}{2}$ である (図 1.1 を参照)。

逆にあるパラメータ θ で円周上の点 $A=(x,y)$ を $A=(x(\theta),y(\theta))$ とパラメータ表示しようとしたとき、x 軸と OA と円周に囲まれた図形の面積が、$frac\theta 2$ になるようにするには、$x=\cos, y=\sin$ 以外にはありえなくなってしまう。

つまりこの性質により、三角関数は完全に特徴づけられており、これを三角関数の定義にすることもできるということだ。

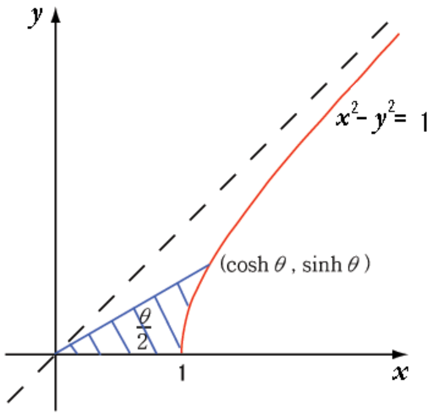


図 1.2　双曲線のパラメータ表示 [2] より変数を改変して引用

同様のことを双曲線上にある第 1 象限の点 $B=(\cosh\theta,\sinh\theta)$ で計算してみよう (図 1.2 を参照)。面積を求める式は、

$$S=\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta-\int_1^{\cosh\theta}\sqrt{x^2-1}dx$$

であり、後ろの定積分は、$x=\cosh\eta$ と変数変換すると、$\sqrt{x^2-1}=\sinh\eta$ で、$dx=\sinh\eta d\eta$ であり、x が $1\to\cosh\theta$ と動くと、η は $0\to\theta$ と動くので、先ほどと全く同様に計算すると (長いので途中式ところどころ省略)

$$\begin{aligned}
\int_1^{\cosh\theta}\sqrt{x^2-1}dx &= \int_0^{\theta}\sinh^2\eta d\eta \\
&= \int_0^{\theta}\left(\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2}\right)^2 d\eta \\
&= [\frac{e^{2\eta}}{8}-\frac{e^{-2\eta}}{8}-\frac{\eta}{2}]_0^{\theta} \\
&= [\frac{\sinh 2\eta}{4}-\frac{\eta}{2}]_0^{\theta} \\
&= [\frac{\sinh\eta\cosh\eta}{2}-\frac{\eta}{2}]_0^{\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sinh\theta\cosh\theta-\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

となる。最後の式変形に $\sinh 0=0$ を使っている。

これより、求める面積は、

$$S=\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta-(\frac{1}{2}\sinh\theta\cosh\theta-\frac{\theta}{2})=\frac{\theta}{2}$$

となり、三角関数の場合と一致する。

上の三角関数における議論を思い返すと、先に上げた条件 (1)〜(3) では関数を一つに絞ることができないが（そもそも厳密な言葉で書かれていないし）、あるパラメータ θ で双曲線上の第一象限の点 $B=(x,y)$ を $B=(x(\theta),y(\theta))$ とパラメータ表示しようとしたとき、x 軸と OA と双曲線に囲まれた図形の面積が $\frac{\theta}{2}$ になるようにするには、$x=\cosh, y=\sinh$ 以外にはありえない。よって、この性質により双曲線関数は完全に特徴づけられていて、これを双曲線関数を定義することもできる。

ただし、この場合の θ は三角関数の場合と違って、原点への線分と x 軸のなす角度とは一致しないので注意するように。

1.4　How To Do It Yourself? Just Do It!

このように自分で数学するには、高校数学と違って関数を教科書や学校の先生が与えてくれることはないから、自分で作らないといけない。そして作ってみると、それは「作った」というより「発見した」と言いたくなるものに思えるから不思議である（この２つの言葉の違いは数学においてはあまり機能しない）。[*6]

このとき重要なのは、**前向き推論**と**後ろ向き推論**の組み合わせである[*7]。この論考では、まず「この問題を解くためにはどんなものが必要か」と後ろ向きに推論を始めた。

それに対して前向き推論では「今ある材料から何が作れるか？」と問う。

どちらも同じくらい重要だが、複雑な問題を特にあたって、後ろ向き推論で大体の筋道を立ててから具体的探索を始める、ということがよく行われる。前向き推論だけでは、どこに向かっていいのか分かりにくいからだ[*8]。

数学が出来る人間は自然に後ろ向き推論が出来るものだが、数学が苦手な人は、与えられた材料をただ漫然と眺めるだけで終わってしまいがちだ。そして問題集の解答では、後ろ向き推論の部分は完全にすっ飛ばして、天下りに方針が決まってしまっているところから始めるから、数学が出来ない人は「これで解けるのは分かったが、なぜこれを思いつけるか分からない」と置いてけぼりになる。

数学が出来る人にとっては後向き推論は呼吸をするように出来てしまうので、言葉にできないのだ。数学が出来る人間など信用せず、自分で習得するよう頑張ろう。そしたら、必要なものは自分で作るという、数学における **DIY 精神**が段々身につくはず。

すでにある道具で問題を解くだけでなく、問題を解くために道具を作ることこそ、数学の醍醐味、人類の神髄。

ないなら自分で作っちゃえばいいのだ。

---

*6 なぜ「発見した」ように思えるのだろうか？これはある用途のためにある条件を満たすように作っただけのはずのものが、使っているうちに最初意図もしていない用途に応用ができ、その中で最初想像もしていなかった良い性質を持っていることを発見したり、自分が作っただけのはずのものの類似物を、いろいろな場所で見ているうちに、そう思うようになるのだ。今回の場合は、最初から三角関数の類似物を作ろうとしてたわけだけど、その類似が最初想定していたよりも深いことやその様々な応用を見ているうちに、これは「作った」というより「発見した」んだな、と思うようになるわけだ。そもそもこの「作った」と「発見した」の対立は、数学的概念が僕らの脳内で発生するときの、「直接的原因」としての「僕たち自身」と、「究極的原因」としての「僕らを包み込む世界」のどちらに注目するかに過ぎない。良い数学的概念というものは、その発端の探求を「直接的原因」だけでは終わらせずに、「究極的原因」までさかのぼらせようとするんだ。

*7 これら推論方法の良い例も [1] にたくさんある

*8 冒頭でのプログラミングとの類似を思い出してほしい。

参考文献

[1] ポリア, G. 1975, 『いかにして問題を解くか (追補版)』柿内賢信訳, 丸善.

[2] ウィキペディア 「双曲線関数」(2015/02/06 最終更新) <https://ja.wikipedia.org/wiki/双曲線関数> (2015/10/12 アクセス).

[3] ウィキペディア 「原始関数の一覧」(2015/10/09 最終更新) <https://ja.wikipedia.org/wiki/原始関数の一覧> (2015/10/12 アクセス). いろいろな関数の原始関数が載っている楽しいページである。このページには求め方は書いていないが、最終的な形が見えることで、計算方法が思いつくこともあるので有効利用しよう。もし wikipedia を見ていて、何か疑問があれば、英語版 wikipedia も読むこと。日本語版には嘘が書いてあったり書き足らなかったりすることが、英語版には分かりやすく正しく書いてあることも多い。英語なんか読めなくても話せればいいっていう人もいるが、話せなくても読めればいいていう人もいるぞ。

第 2 章

証明論的意味論への招待/あるいは/哲学はなぜ論理を語るのか

鈴木佑京

2.1　はじめに

この原稿は二つの目標を持っている。ひとつは、副題にあるように、論理学の哲学における「証明論的意味論」というアイデアを、初心者にもわかりやすく紹介することだ。もうひとつは、「証明論的意味論」を実例として、哲学者が数学や論理学を使う意義がどこにあるのかを考えることにある（前号まで読んで頂いているかたはご存知だと思いますが一応述べておくと私は哲学者です）。

それぞれの目標をもう少し詳しく説明しよう。

「意味論」という語は、論理学においては普通、「モデル論」とほとんど同じ意味で使われる。そして「モデル論」とは、普通、表現に対して「モデル」と呼ばれる対応物を考えるような理論のことを言う。この用法においては、「証明論的意味論」というのは殆ど矛盾した、まともに理解することのできない表現に見える。「モデル論」的でないこと——表現に対してその対応物を考えず、表現をただ表現として研究すること——こそが、「証明論」のメルクマールであるはずだからだ。

だが、「意味論」を文字通り、表現の意味を説明する理論、と読んでみよう（哲学ではこういう用法が支配的である）。とすると、「証明論的意味論」という表現は、証明論的な道具を使って、表現の意味を説明するような理論、として理解できる。実際、現在「証明論的意味論」という言葉でくくられている研究は、自然演繹やシークエント計算、型理論といった特定の証明体系と、正規化・カット除去といった証明論的な定理をもとにして、論理的・数学的表現の意味を説明しようとするものである。

証明論的意味論の重要性は、それがいわゆる「使用説」にモデル（モデル論の意味でのモデルではなく、「模型」「具体化」というような意味でのモデル）を提供していることにある。「使用説」とは、ウィトゲンシュタインによって唱えられた、言語哲学上のアイデアである。

普通、言葉の意味とは、その言葉が指す対象とか、概念とかのことだと考えられるだろう。哲学においてもこのような考え方——表現の意味として、表現になにか存在者をあて

がう考え方——が支配的である。従って、哲学において（及び言語学においても）、言葉の意味を説明するための理論は、多くの場合モデル論的なやり方で展開されてきた。

使用説はこの伝統的な考え方に真っ向から反する。言葉を使えているのに意味を理解していないとか、意味を理解しているのに言葉の使い方がわからないなどということはない。言葉をうまく使えているということと、言葉の意味を理解しているということの間には、なんのギャップも存在しないはずだ。従って、言葉の意味とはその使われ方にほかならない。使われ方さえ説明できれば、言葉に対応する「概念」や「指示対象」というようなものを持ち出す必要はないのだ。

使用説は、哲学において支配的であった言葉の意味についての考え方を根本から覆す可能性を秘めているという意味で重要である。そして、証明論的意味論は、この使用説の発想を具現化したモデルとしてみることができるわけだ。この文章で我々は、いかなる意味で証明論的意味論が使用説の発想を具体化しているのかを確認していく。

さて、ここまでの話を前提にして、ふたつ目の目標を説明しよう。歴史上、プラトンから、ライプニッツ、カント、フレーゲに至るまで、優れた哲学者の多くが数学や論理学について思考を巡らせてきた。にもかかわらず、哲学者が数学や論理学について語ることに対しては、時にかなりの疑いの目を向けられることがある。哲学者に向けられる疑いの中には、もっともなものもある（そもそも哲学者に十分な数学的・論理学的知識がないのではないか、とか）。が、誤解に基いているものもあると思う。

誤解というのはこういうことだ。いわゆる「ソーカル事件」*1 や『「知」の欺瞞』[16]*2 によって、哲学者が数学や論理を語るやり方について、たとえばこんなイメージがついてしまったのではないか。哲学者は、なにか哲学的アイデアを述べるために、数学的・論理学的比喩を使おうとする。しかし、比喩は表現であって内容でない。内容そのものが数学的でない以上、数学的でない仕方でそれを表現することはできるはずだ。わざわざ数学や論理学をもちだす必要はない。にもかかわらず数学や論理学を使うのは、単に権威付けがしたいだけなのではないか。

私のふたつ目の目標は、哲学において数学や論理を扱う時、もうちょっと生産的なやり方があるんですよ、ということを説明することだ。それは、哲学的アイデアのメタファーではなく、モデルとして、数学や論理を使うということである。つまり、自然言語によって書かれ・考えられた哲学的アイデアに対して、それを具体化するようなモデルを数学や論理の言葉で構築することによって、もとの哲学的アイデアが持っている帰結をより厳密に検証しようということだ。これは単に、元の哲学的アイデア（内容）に数学的意匠（表現）をまとわせるということではない。元の哲学的アイデア（内容）自体を、数学的道具立てによってより明確化しようということである。

私の考えでは、証明論的意味論はまさしく、使用説に対してこのような役割を果たしている。つまり、使用説が持つ帰結を、論理学的道具を使ってモデルを構築することで、より明確にする、という役割である。というわけで私は、哲学的アイデアのモデルとしての数学・論理学、という使い方の実例として証明論的意味論を提示することで、“わざわざ数学や論理学をもちだす必要” があるということを説明したい。

---

*1 物理学者ソーカルが、デタラメな自然科学的比喩を使ったいたずら論文を思想雑誌に投稿し、アクセプトされてしまったという事件。

*2 ソーカル事件を受けてソーカルとブリクモンが出版した本で、ドゥルーズやクリステヴァ、ラカンといったフランスの名だたる思想家がいかにデタラメな自然科学的比喩を使っているのかを明らかにした本。

話は次のような順番で進める。まず最初に、証明論的意味論によってモデルを与えるべき哲学的アイデアであるところの使用説を説明する。次に、使用説に対して証明論的意味論がどのようなモデルを与えているかを確認する。最後に、そのようにモデル化することによってどのようなことがわかったかを確認する。

2.2 使用説

使用説とは、冒頭に述べた通り、言葉の意味は言葉の使い方だ、という考え方である。しかし、こう述べただけではあまりに内容がない。特に、「言葉の使い方」と言う形で漠然と述べられていることがらの内実をもう少し明らかにしたい。そこで以下では、ダメットによってもう少し内実を与えられた使用説を説明することにする [2]。彼のバージョンでは、「言葉の使い方」の内実がもう少し明確化しているし、証明論的意味論というアイデアとの連続性もより強くなっているからだ。

使用説においては、言葉の意味は言葉の使い方である。では、言葉の使い方とは何か。ダメットによればそれは、その言葉を使うための根拠と、その言葉を使うことの帰結という二つの側面の総体である。つまり、ある会話に対して、その言葉を入場させるやり方（根拠）と、その言葉を退場させるやり方（帰結）という二側面に、「使い方」という漠然たるものを分けて考えようというわけだ。

例えば、ある推論が「妥当である」という述語を使うことができるためには、推論を「妥当である」とチェックするためには何を調べればよいのか（根拠）ということと、推論を「妥当である」と判断したなら、そこから何ができるか（帰結）を理解していなければならない。推論が「妥当である」ことを根拠付ける方法としては、前提が真なら帰結も真であるということをチェックしたり、あるいは前提から帰結に向けてなんらかの証明体系で証明図を書いてみるなどといった方法がある。さらに、推論が「妥当である」と受け入れている場合は、前提が真であるとわかった時は、結論が真であることも受け入れなければならないということが帰結する。「妥当である」という言葉を理解するためには、こうしたことを理解しておかねばならないが、逆に言えば、こうしたことがわかっていれば、「妥当である」という言葉の使い方を理解しているといえるだろう。

ところで、我々は、ある表現に対して、根拠と帰結を好き勝手に定めていいのだろうか。実はそういうわけでもない。例えば、プライアーが提案した $tonk$ という接続詞がある [12]。$tonk$ は、次のように使い方が定められている。A が成り立っているとわかっているなら、それを根拠として、「$AtonkB$」を発話してよい。逆に、「$AtonkB$」を発話することの帰結として、そこから B が成り立っていることを推論できる。

だが、このように「$AtonkB$」の用法を定めると、次のような推論ができるように思える。何か A ということがわかっているとする。すると我々は「$AtonkB$」を発話できる。だがここから B が帰結として引き出せる。つまり、任意のことがら A から任意のことがら B を推論できるように思える。これでは、我々の推論実践は破綻してしまう。

ここからダメットは、言葉の使い方の二つの側面の間には、「調和」がなければならない、と結論付ける。もしも「$AtonkB$」の根拠が、A と B の両方が分かっていることである、としよう。とすると、先ほどのように推論実践が破壊される帰結は起こらない。つまり、$tonk$ の問題は、根拠が弱すぎる（ないし帰結が強すぎる）ということにある。根拠と帰結の間には、根拠の強さに対して帰結が強すぎてはならない、という、ある種のバラン

スが要求されるのである。

まとめると、ダメット的使用説のポイントは、

- 言葉の意味は、根拠と帰結で与えられる。
- 根拠と帰結は調和していなければならない。

ということにある。

2.3 証明論的意味論

では、このダメット的使用説をどのようにモデル化するのか。ここまででもうピンときた方も居ると思う。自然演繹における導入則と除去則を利用するのである[*3]。

例えば、直観主義論理の自然演繹 LJ における $\wedge$ の導入則・除去則は次のようなものである。

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge I) \quad \frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E0) \quad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E1)$$

証明論的意味論においては、ダメット的使用説における「根拠」と「帰結」を、導入則と除去則に対応するものとしてみる。導入則は、ある論理結合子を使って作られる文を発話するための根拠を特定している。$A \wedge B$ の根拠は、A と B として特定される。除去則は、ある論理結合子を使って作られる文を発話することの帰結を特定する。$A \wedge B$ からは、A ないし B を帰結させることができる。

つまり証明論的意味論とは、自然演繹における導入則と除去則を、論理結合子（を使った複合文）に対する根拠と帰結を説明するものとして読むことによって、自然演繹の規則が論理結合子の意味を説明していると考え、証明体系をすなわちそのままダメット的使用説に基づく意味論としてみなしたものなのである。ダメット的使用説が大まかに自然言語を使って述べていたアイデアを、論理結合子という特定の表現に限ってではあるが、自然演繹という論理学的な道具立てを使ってモデル化したものが、証明論的意味論なのである。

しかしここまででは、ダメットのアイデアの半面までしか扱えているとはいえないだろう。「調和」というアイデアはどうするのか？ここで出てくるのが、「局所的ピークの簡約」という、証明論的な概念である。

証明図の中で、導入則の直後に除去則を適用する次のような部分は、証明論において、「局所的ピーク」と呼ばれる。

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi_0 \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}}{\begin{matrix}B \\ \Pi_2\end{matrix}}$$

だが、上の証明図は、一度 B を証明したうえでもう一度 B を証明しなおしており、単なる回り道をしているように見える。実際、$\wedge$ の場合、局所的ピークは、なしで済ますことができる。というのも、上の局所的ピークを、次のように「簡約」することで、局所的

[*3] 以下の記述は基本的にダメットとプラヴィッツの証明論的意味論を説明したものであり、[2] と [10] を元にしている。

ピークの存在しない別の推論を作ることができるからである。

$$\begin{array}{c} \Pi_0 \qquad \Pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}}{B} \\ \Pi_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \Pi_1 \\ B \\ \Pi_2 \end{array}$$

以上のような、局所的ピークを証明図から抜く手続きを「局所的ピークの簡約」と呼ぶ。「局所的ピークの簡約」は、与えられた証明から、回り道のないきれいな証明——専門用語では「正規な証明 normal proof」——を作る「正規化 normalization」の手続きのいちステップをなす。正規な証明は、部分論理式特性という非常に扱いやすい性質を持っているので、局所的ピークの簡約が可能であること、ひいては証明を常に正規化できることを示す「正規化定理」は、証明論において最も重要な定理である。

証明論的意味論では、以上の「局所的ピークの簡約」が可能であるということを、根拠と帰結の間の調和を形式的に表現したものとみなす。なぜか？局所的ピークが簡約可能であるということは、根拠の中にすでに帰結が含まれているということ、とみなせるからだ。例えば上で確認した $\wedge$ の場合においては、除去則によって $A \wedge B$ の帰結として引き出されている B が、導入則によって $A \wedge B$ を引き出すための根拠 A,B の中にすでに含まれている、ということが、局所的ピークの簡約の可能性に決定的に効いている。もしも $A \wedge B$ を言うための根拠に B が必要なくなる（A だけから $A \wedge B$ を結論できる）ように導入則を変更する、つまり、

$$\frac{A}{A \wedge B}\ (\wedge I')$$

とすると、根拠の中に帰結が含まれなくなり、また、上の局所的ピークも簡約できなくなる。また、$A \wedge B$ からもっと強力な帰結——全然関係のない文 C を好き勝手に引き出せるように除去則を変え、

$$\frac{A \wedge B}{C}\ (\wedge E')$$

とすれば、やはり根拠の中に帰結が含まれなくなり、これまた局所的ピークは簡約できない。以上より、局所的ピークが簡約できるということを、根拠の中に帰結が含まれているということを表現しているものとしてみなすことができるだろう。そして、根拠の中に帰結が含まれているということは、前節で確認した調和の概念——根拠の強さに対して帰結が強すぎてはならないというバランス——を、その漠然性を減らして、より明確なものに限定したものとして見ることができる。つまり、局所的ピークの簡約を、ダメット的使用説における調和の概念を根拠の中に帰結が含まれていることとして限定し、形式的な表現を与えたものとして見ることができるのである[*4]。

まとめると、ダメット的使用説の

- 言葉の意味は、根拠と帰結で与えられる。
- 根拠と帰結は調和していなければならない。

[*4] ちなみに、$(\wedge I')$ や $(\wedge E')$ のように $\wedge$ の推論規則を変えると、*tonk* のような前提と結論に何の関係もない破綻した推論ができるようになる。つまり、$(\wedge I')$ や $(\vee E')$ は調和を破壊してしまう規則である。$(\wedge I')$ や $(\wedge E')$ が局所的ピークの簡約を不可能にしてしまうことは、局所的ピークの簡約を調和の形式的表現とみなすことに支持を与えてくれる。

という二つのポイントは、証明論的意味論において、

- 論理結合子の意味は、導入則と除去則で与えられる。
- 導入則と除去則は局所的ピークが簡約できるようになっていなければならない。

という仕方で、論理学的な概念によってモデル化されるわけである。

2.4 何が分かるか？

さて、以上のように使用説の発想をモデル化することによって、何が分かるのか。わざわざ論理学を持ちだす意味があったかどうかはそこにかかっている。

まずひとつわかっているのは、どうやら使用説は直観主義論理と相性が良さそうだ、ということである。直観主義論理の規則は全て、局所的ピークが簡約できるように設計されている。これに対して古典論理の場合、否定の規則が局所的ピークの簡約を許さないようになってしまっている [2]。従って、少なくともダメット的な使用説とはどちらかとえば直観主義論理の方が相性が良さそうだということになる。しかもそのことが、自然言語によって定式化された漠然たる条件ではなく、局所的ピークの簡約可能性という形式的かつ明確な条件によって判断できるわけだ。

もちろん、このことは、ダメット的使用説を古典論理に当てはめられないということを意味しない。一般に直観的アイデアを数学的モデルに落としこむ方法は一通りではない。ダメット的使用説も、別の仕方でモデル化できる可能性がある。複数結論自然演繹などといった証明体系を使って古典論理の証明論的意味論を与えようとする研究がなされているが、こうした試みはこのような視点から理解できるだろう [13]。しかしいずれにせよ、単に漠然たるアイデアを弄ぶのではなく、そのアイデアをどう論理学的な概念でモデル化するか、それぞれのモデルは元のアイデアとどの程度連続性を持っているのかといった形で、論ずるべきことが明確化したのは、自然演繹による証明論的意味論が最初に現れたことの功績である。

また、もしもダメット的使用説は古典論理に不利な形でしかモデル化できないのだとすれば、逆に、古典論理に有利なモデルを得るためには、ダメット的使用説のどこを変更すればいいのか、という問題意識も生まれてくる。つまり、論理学的モデルについての検討が、自然言語による哲学的な議論に跳ね返ってくるのである。ここでは詳しく説明しないが、いわゆる「双側面説」は、まさしくこのような問題意識から現れた哲学的アイデアである [7] [14]。

さらに、使用説を取ると直観主義論理だけが支持されるわけでもないのではないか、ということもわかってきている。前節で述べた「局所的ピークの簡約」という条件は、導入則と除去則の間だけではなく、導入則と推論規則一般に対して適用できるように一般化できる。つまり、導入則の直後になんらかの推論規則を適用した時、これを局所的ピークと同様に簡約できるかどうか、という条件である。ダメット（及びプラヴィッツ）は、この一般化された条件に基き、導入則と “調和” する推論規則一般を「妥当である」と呼ぶ [2] [10]。すると面白いことに、直観主義論理の推論規則によって導出することはできないが、しかし直観主義論理の導入則と調和する推論規則を構築することができるのであ

る[*5]。この推論規則は直観主義論理の内部では導出不可能だが、導入則と調和している以上、ダメット的使用説に基づく限りは正当なものとして認めてよいように見える。つまり、ダメット的使用説に基づく時、直観主義論理は推論体系として完全ではないのではないか、という疑いが生まれるのである。そしてこの疑いは、局所的ピークの簡約可能性（の一般化）という、やはり形式的なタームで記述できる条件に基いているものである。

もちろんここでも先程と同様の事情がある。完全性に関する疑念は、局所的ピークの簡約を一般化することによって生まれていた。そして、局所的ピークの簡約はもともと「調和」のアイデアを形式化したものであった。従って、完全性に対する疑念は、「調和」のアイデアを推論規則一般に拡大し、かつ、そのアイデアを局所的ピークの一般化によって形式化することによって引き起こされているものと理解できる。

しかし、「調和」の概念を推論規則一般に拡大してそれを形式化しようという場合は、除去則だけを考えていた場合には必要ない、なにか特別な工夫が必要なのかもしれない。つまり、推論規則一般に対する「調和」の概念は、局所的ピークの簡約の単純な一般化によって形式化できるものではないのかもしれない。あるいはそもそも、「調和」のアイデアは、推論規則一般に拡大できないものなのかもしれない。ここでもまた、アイデアをモデルにどう落としこむのか、それぞれのモデルが元のアイデアとどの程度の連続性を持つのかといった問題が生まれ、また、逆に論理学的モデルに関する議論が逆に哲学的な議論に跳ね返ってくる。

2.5　まとめ

以上、使用説という哲学的アイデアを説明し、それがどのように証明論的意味論において論理学的モデルを受け取るのか、そしてそのようなモデルを使ったことで何が分かるのかということを検討した。

冒頭に述べた二つの目標について、ひとつ目の目標については、以上の記述で十分に果たされたことと思う。またふたつめの目標についても、哲学的アイデアに数学・論理学によってモデルを与えることによって、単に漠然たるアイデアを弄ぶだけでは不可能なこと——つまり、１）より形式的で厳密な概念を使って哲学的アイデアの帰結を調べること、そしてそこから、２）新しいモデルの探求、モデルとアイデアの距離の査定、あるいはモデルから哲学的アイデアに対するフィードバックなどといった、生産的な問題系にアクセスすること——が可能になると、実例を持って示すことができたと思う。というわけで、もし今後哲学者が数学や論理の話をしている時があっても、例えば経済学が数学を利用してモデルを作っていると同じようなものだと思って、（適度な疑いの目とともに）優しい目で見ていただけるとありがたい。

この文章の目標は無事果たすことが出来た。最後に、私がこの文章でしなかったことを書いて、終わりとしよう。私はこの文章で、哲学者が数学や論理をどのように使うことができるか、ということを、実例をもって説明した。だが、この逆——数学者や論理学者は哲学を使うことができるか、数学や論理学に哲学は何かを提供できるか、という問題には全くタッチしなかった。数学・論理学が哲学の役に立つだけではなく、哲学が数学・論理学の役にもし立てば、お互いハッピーでより仲良くなれるだろう。こうしたハッピーさ

[*5] いわゆる「ハロップの規則」がその一例である。[8] を参照。

が本当に成り立ちうるのかどうかの検討は、また稿を改めて行いたい。

2.6　文献紹介

ここでは証明論的意味論についてもう少し勉強してみたい読者に向けて文献を紹介する。

証明論的意味論というプログラムについてなんとなく雰囲気を掴んでみたいという読者は、スタンフォード哲学辞典の「証明論的意味論」の項を読んでみるのがいいだろう [15]。だが SEP の記事は、ある程度知識のある人向けのサーヴェイといった趣で、初心者では十全に理解することは難しい。SEP の記事よりも長くはなるが、よりわかりやすいサーヴェイとしては、日本語で書かれた [4] と、[7] の第二章をおすすめする。

より専門的に証明論的意味論を勉強するなら、やはりダメットとプラヴィッツの論文は外せない。特にプラヴィッツの [9] [11] とダメットの [2] が重要である。

ダメットやプラヴィッツは比較的哲学者寄りなので、もう少し数学的・論理学的な筆致で書かれたものを読みたいという方もいると思う。その場合は [6] の最初の章を読むと良いだろう。この本は証明論全体の良い入門書でもある。

本文中で少し言及した、自然演繹ではない体系に基づく証明論的意味論については、[7] の第三章以降がシークエント計算及び双側面自然演繹に基づくバージョンをサーヴェイしているので、これを足がかりに調べていくとよい。また、マルティン・レーフの直観主義型理論 [5] も、証明論的意味論の一変種と見ることができる。

証明論的意味論の背景にある使用説の発想については、ウィトゲンシュタインの諸著作にいきなりあたるよりは、ダメットの論文を読んだほうが掴みやすいと思う（かと言ってダメットの論文も決して簡単ではないが…）。最も重要なのは [3] だが、それに匹敵する重要論文集である [1] が邦訳されている。「直観主義論理の哲学的基底」、「演繹の正当化」、「真理」といった論文は、証明論的意味論に現在でも新たな問題意識を提供している論文である。

参考文献

[1] ダメット, M. 1986, 『真理という謎』藤田晋吾訳, 勁草書房.

[2] Dummett, M. 1991, Logical Basis of Metaphysics, Harvard.

[3] Dummett, M. 1974, “What is a theory of meaning?(II)”, in *Truth and Meaning* (eds. Evans, G. and McDowell, J.): 67-137.

[4] 伊藤遼. 「証明論的意味論とその課題」, 哲学論叢, 37:S37-S48.

[5] Martin-Löf, P. 1984, Intuitionistic Type Theory. Napoli: Bibliopolis.

[6] Negri and Von Plato. 2001, Structrual Proof Theory, Cambridge.

[7] 大西琢朗. 『証明論的意味論と双側面説』, 京都大学博士論文.

[8] Piecha,T, Campos Sanz, W, and Schroeder-Heister, P. 2014, “Failure of

Completeness in Proof-Theoretic Semantics", *Journal of Philosophical Logic*, 44(3):321-335.

[9] Prawitz,D. 1973, "Towards a Foundation of a General Proof Theory", in *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV* (eds. Patrick S et al.) North-Holland: 225250.

[10] Prawitz, D. 2006, "Meaning approached via proofs", *Synthese*, 148(3): 507-524.

[11] Prawitz, D. "Pragmatist and Verificationist Theories of Meaning", in *The Philosophy of Michael Dummet* (eds. Auxier, R. and Hahn, L.):455-481.

[12] Prior, A. 1960, "The Runabout Inference-Ticket", *Analysis*, 21(2):38-39.

[13] Read, S. 2000, "Harmony and Autonomy in Classical Logic", *Journal of Philosophical Logic*, 29 (2):123-154.

[14] Rumfitt, I. 2000, "'Yes' and 'No'", Mind, 109(436): 781-823.

[15] Schroeder-Heister,P. 2014, "Proof-Theoretic Semantics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/proof-theoretic-semantics/>.

[16] ソーカル,A, ブリクモン. 2012,『「知」の欺瞞』田崎晴明他訳, 岩波書店.

第 3 章

Lawvere-Tierney 位相・層化関手に関するノート

古賀 実

このノートは，トポス上の Lawvere-Tierney 位相に対する層の理論の基礎を述べた，Mac Lane と Moerdijk による『Sheaves in Geometry and Logic』（SGL） [2] の第 V 章 1 節 Lawvere-Tierney topologies, 2 節 Sheaves，3 節 The associated sheaf functor と 4 節 Grothendieck subsumes Lawvere-Tierney の定義と定理を述べ，証明の行間を淡々と埋めた物です．

第 0 節では，SGL の第 IV 章で述べられているトポスに関する基本的な概念と性質を後に使い易い形に纏めました．幾つかの事実には証明が与えられていません．その場合，SGL の該当箇所を挙げ参照可能な形にしてあります．本稿の第 1,2,3,4 節はそれぞれ，SGL の第 V 章 1,2,3,4 節に対応します．第 1 節で Lawvere-Tierney 位相を導入し，第 2 節で Lawvere-Tiernety 位相に対する層を定義します．第 3 節で層化関手を構成し，その左完全性を示します．左完全性の証明では一部，SGL の証明ではなく， Johnstone による『Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium Volume 1』 [3] を参照しました．第 4 節では，Grothendieck 位相と Lawvere-Tierney 位相の関係を述べ，前層圏に於ける 2 つの位相に対する層がある意味で同等であることを示します．

本は紙面の都合上細々とした事実の証明に頁を割けず，証明なしに主張が述べられている事がしばしばあります．このノートがそのような行間を埋め，理解の一助となれば幸いです．

尚，圏論に関する前提知識は Mac Lane による『Categories for the Working Mathematician』 [1]，C87 と C88 で頒布した「The Dark Side of Forcing IV」の第 3 章「Grothendieck 位相・サイト上の層・層化関手に関するノート」と「The Dark Side of Forcing V」の第 3 章「Grothendieck トポスの基本性質に関するノート」を想定しています．上記のノートは以下の Web サイトから入手できます：`http://forcing.nagoya/`

ノートの本文は英語で書かれていますが，これは洋書である原書の形式・言葉遣いに合わせるためです．

3.0 Preliminaries on Topoi

In this section, we present some basic notions and facts about topoi.

For an object E, and two monomorphisms $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ in a category $\mathbf{C}$, if there exists a morphism $f : A \to B$ such that $m = nf$ (necessarily, f is a monomorphism), then we shall write $m \leq n$ (or $A \leq B$). Moreover, we shall write $m \cong n$ (or $A \cong B$) if $m \leq n$ and $n \leq m$ hold. Note that $m \cong n$ iff there exists an isomorphism $i : A \to B$ such that $m = ni$. Note also that the binary relation $\cong$ is an equivalence relation on the class of all monomorphisms with codomain E. We shall denote the class of all equivalence classes of monomorphisms with codomain E by $\mathrm{Sub}_{\mathbf{C}}(E)$. As usual, according to the context, we shall say that $m : A \rightarrowtail E$ is a subobject of E (or A is a subobject of E for short), meaning a particular representative of the equivalence class or an equivalence class of monomorphisms with codomain E.

Definition 3.0.1 (topoi [2], Definition IV.1 (pp. 161–163)). A *topos* is a category $\mathcal{E}$ such that

(i) $\mathcal{E}$ has finite limits;
(ii) $\mathcal{E}$ has power objects;
(iii) $\mathcal{E}$ has a subobject classifier. ◊

Fact 3.0.1 ([2], Theorem IV.2.1 and Corollary IV.5.4). *Every topos has finite colimits and exponentials. That is, every topos is an elementary topos* (see [2, p. 48])*. Conversely, every elementary topos is a topos.* □

Let $\mathcal{E}$ be a topos and $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ a subobject classifier for $\mathcal{E}$.

Definition 3.0.2. Let E be an object in $\mathcal{E}$. We shall denote the classifying morphism for a subobject $m : A \rightarrowtail E$ of E by $\mathrm{char}(m)$. In particular, we shall call the classifying morphism for the diagonal morphism Δ_E[*1] for E the *Kronecker delta* of E, and denote it by $\delta_E : E \times E \to \Omega$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "!^E"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ E \times E \arrow[r, "\delta_E"'] & \Omega, \end{tikzcd} \tag{3.0.1}$$

where $!^E$ is the unique morphism from the object E to the terminal object 1. We shall call the exponential transpose (see [1, p. 98] [2, p. 20]) of the Kronecker delta δ_E by

[*1] In a category with binary products, the *diagonal morphism* $\Delta_E : E \to E \times E$ for an object E is a morphism such that $\pi_i \Delta_E = \mathrm{id}_E$ $(i = 1, 2)$ for the projections $\pi_i : E \times E \to E$ $(i = 1, 2)$. Note that, by the universal mapping property of products, the diagonal morphism is unique. Moreover, Δ_E is a monomorphism.

E the *singleton morphism* for E, and denote it by $\{*\}_E$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[d, "\mathrm{id}_E \times \{*\}_E"'] \arrow[dr, "\delta_E"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & \\ E \times \Omega^E \arrow[r, "\mathrm{ev}_E"'] & \Omega, \end{tikzcd} \tag{3.0.2}$$

where ev_E is the evaluation morphism.

We shall call the classifying morphism for $\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$ the *internal meet operation*, and denote it by $\wedge$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{true},\mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.0.3}$$

For two morphisms $s, t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega)$, we shall denote the composite $\wedge \circ \langle s, t \rangle$ by $s \wedge t$ for short. $\Diamond$

Fact 3.0.2. *Let $e, e' : A \to E$ be two morphisms in $\mathcal{E}$. Then we have the following equivalence:*

$$\delta_E \langle e, e' \rangle = \mathrm{true} \circ !^A \Leftrightarrow e = e'. \tag{3.0.4}$$

$\square$

Proof. Suppose that $\delta_E \langle e, e' \rangle = \mathrm{true} \circ !^A$. Then, by the definition of the Kronecker delta, there exists a unique morphism $l : A \to E$ such that $\Delta_E l = \langle e, e' \rangle$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\exists ! l"] \arrow[drr, bend left, "!^A"] \arrow[ddr, bend right, "\langle e,e' \rangle"'] & & \\ & E \arrow[r, "!^E"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ & E \times E \arrow[r, "\delta_E"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

This implies that $e = l = e'$.

For the converse, suppose that $e = e'$. Then we have $\langle e, e' \rangle = \Delta_E \circ e$. This implies that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\langle e,e' \rangle"'] & E \arrow[r, "!^E"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ & E \times E \arrow[r, "\delta_E"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Hence, we obtain $\delta_E \langle e, e' \rangle = \mathrm{true} \circ !^A$. The proof is complete. ■

Fact 3.0.3. *For any object E in $\mathcal{E}$, the singleton morphism $\{*\}_E$ for E is a monomorphism.* $\square$

Proof. Let $e, e' : A \to E$ be two morphism such that $\{*\}_E e = \{*\}_E e'$. By taking the exponential transpose of each side of $\{*\}_E e = \{*\}_E e'$, we have $\delta_E(\mathrm{id}_E \times e) = \delta_E(\mathrm{id}_E \times e')$, and the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
E \times A \arrow[d, "{\mathrm{id}_E \times e,\, \mathrm{id}_E \times e'}"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta_E(\mathrm{id}_E\times e)=\delta_E(\mathrm{id}_E\times e')"] & \\
E \times E \arrow[d, "\mathrm{id}_E \times \{*\}_E"'] \arrow[dr, "\delta_E"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
E \times \Omega^E \arrow[r, "\mathrm{ev}_E"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

On the other hand, note that both squares in the following diagram are pullbacks:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e"] \arrow[d, tail, "\langle e, \mathrm{id}_A\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & E \arrow[r, "!^E"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \times A \arrow[r, "\mathrm{id}_E \times e"'] & E \times E \arrow[r, "\delta_E"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

By the pasting lemma for pullback squares, the outer rectangle is also a pullback diagram. Hence, we have $\mathrm{char}(\langle e, \mathrm{id}_A\rangle) = \delta_E(\mathrm{id}_E \times e)$. Considering the same diagram for e', we also have $\mathrm{char}(\langle e', \mathrm{id}_A\rangle) = \delta_E(\mathrm{id}_E \times e')$. From the above, we obtain

$$\mathrm{char}(\langle e, \mathrm{id}_A\rangle) = \delta_E(\mathrm{id}_E \times e) = \delta_E(\mathrm{id}_E \times e') = \mathrm{char}(\langle e', \mathrm{id}_A\rangle).$$

This implies that there exists a morphism $h : A \to A$ such that $\langle e, \mathrm{id}_A\rangle = \langle e', \mathrm{id}_A\rangle h$. Therefore, we have $e = e'h$ and $\mathrm{id}_A = h$. Thus, we obtain $e = e'$. The proof is complete. ■

Fact 3.0.4. *For each object E in $\mathcal{E}$, the class $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$ of all subobjects of E is a meet semi-lattice. Moreover, for any two subobjects $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ of E, the classifying morphism for the meet $m \wedge n$ of m and n in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$ is given by the composite $\wedge \circ \langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n)\rangle$, i.e.,*

$$\mathrm{char}(m \wedge n) = \wedge \circ \langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n)\rangle = \mathrm{char}(m) \wedge \mathrm{char}(n). \tag{3.0.5}$$

□

Proof. Let $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ be two subobjects of E. First, we claim that the meet $m \wedge n : A \wedge B \rightarrowtail E$ of m and n is given by the pullback of n along m as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \wedge B \arrow[r, tail, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, tail, "m^{-1}(n)"'] \arrow[dr, "m \wedge n"] & B \arrow[d, tail, "n"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & E.
\end{tikzcd}$$

Put $m \wedge n := m(m^{-1}(n)) : A \wedge B \rightarrowtail E$. Clearly, we have $m \wedge n \le m, n$. To prove that $m \wedge n$ is the greatest lower bound of m and n, suppose that there exists a subobject $l : L \rightarrowtail E$ of E such that $l \le m, n$. Then there exist two morphisms $u : L \to A$ and $v : L \to B$ such that $mu = l$ and $nv = l$, respectively. By the universal mapping property of the pullback $A \wedge B$, this implies that there exists a unique morphism $k : L \to A \wedge B$ such that $m^{-1}(n)k = u$ and $n^{-1}(m)k = v$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[dr, dotted, "\exists! k"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& A \wedge B \arrow[r, tail, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, tail, "m^{-1}(n)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "n"] \\
& A \arrow[r, tail, "m"'] & E.
\end{tikzcd}$$

Hence, we have $l \leq m \wedge n$. Therefore, $m \wedge n$ is the greatest lower bound of m and n.

Next, we shall prove that the classifying morphism for the meet $m \wedge n$ is given by the composite $\wedge \circ \langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle$. To prove this, by the pasting lemma for pullback squares, it is sufficient to prove that the following both left hand-side and right hand-side of the outer rectangle are pullback squares:

$$\begin{tikzcd}
A \wedge B \arrow[r, "!^{A \wedge B}"] \arrow[d, tail, "m \wedge n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[r, "!^{1}"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true}, \rangle"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \arrow[r, "\langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

We shall only prove that the left hand-side of the outer rectangle of the above diagram is a pullback square. Suppose that there exists a morphism $u : X \to E$ such that $\langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle u = \langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle \circ !^X$. We must prove that there exists a unique morphism $l : X \to A \wedge B$ such that $(m \wedge n)l = u$. By taking each component of each side of $\langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle u = \langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle \circ !^X$, we have

$$\mathrm{char}(m)u = \mathrm{true} \circ !^X \quad \text{and} \quad \mathrm{char}(n)u = \mathrm{true} \circ !^X.$$

Note that the following both two diagrams are pullback squares:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \arrow[r, "\mathrm{char}(m)"'] & \Omega,
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \arrow[r, "\mathrm{char}(n)"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Hence, there exists a unique morphisms $l_m : X \to A$ and a unique morphism $l_n : X \to B$ such that $ml_m = u$ and $nl_n = u$, respectively. By the pullback condition for $A \wedge B$, there exists a unique morphism $l : X \to A \wedge B$ such that $m^{-1}(n)l = l_m$ and $n^{-1}(m)l = l_n$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "l_n"] \arrow[dr, dotted, "\exists! l"] \arrow[ddr, bend right, "l_m"'] \arrow[dr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& A \wedge B \arrow[r, tail, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, tail, "m^{-1}(n)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "n"] \\
& A \arrow[r, tail, "m"'] & E.
\end{tikzcd}$$

Therefore, we have

$$(m \wedge n)l = m(m^{-1}(n))l = ml_m = u.$$

To prove the uniqueness, suppose that there exists another morphism $l' : X \to A \wedge B$ such that $(m \wedge n)l' = u$. Since $m \wedge n = m(m^{-1}(n)) = n(n^{-1}(m))$, we have $m(m^{-1}(n))l' = u$ and $n(n^{-1}(m))l' = u$. Recall that two morphisms l_m and l_n are unique ones such that $ml_m = u$ and $nl_n = u$, respectively. This implies that we have $m^{-1}(n)l' = l_m$ and $n^{-1}(m)'l = l_n$. Recall also that the morphism $l : X \to A \wedge B$ is a unique one such that $m^{-1}(n)l = l_m$ and $n^{-1}(m)l = l_n$. Thus, we obtain $l' = l$. The proof is complete. ■

Fact 3.0.5. *In a topos, every monomorphism is an equalizer, and every bimorphism* [*2] *is an isomorphism.* □

Proof. Let $m : A \rightarrowtail E$ be a monomorphism. Then there exists the classifying morphism $\mathrm{char}(m)$ for m making the following diagram a pullback:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\ E \arrow[r, "\mathrm{char}(m)"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

This implies that m is the equalizer of $\mathrm{char}(m)$ and $\text{true} \circ !^E$. If m is an epimorphism, then we have $\mathrm{char}(m) = \text{true} \circ !^E$. This implies that $\mathrm{char}(m) = \mathrm{char}(\mathrm{id}_E)$, i.e., m is an isomorphism. The proof is complete. ■

Definition 3.0.3 (images). For a morphism $f : A \to B$ in a category $\mathbf{C}$, a monomorphism $m : M \rightarrowtail B$ is called an *image* of f if f factor through m, say $f = me$ for some morphism $e : A \to M$, and if there exists another monomorphism $n : N \rightarrowtail B$ through which f factor, say $f = nh$ for some morphism $h : A \to N$, then m factors through n, i.e., there exists a morphism $l : M \to N$ such that $nl = m$. In other words, an image m of f is a representation of the least subobject of B through which f factor as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "h"'] & M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, tail, "l"] & B \\ & N. \arrow[ur, tail, "n"'] & \end{tikzcd}$$

We shall also call the object M an *image* of f. ◊

Note that if we have two factorizations $f = me$ and $f = me'$ with a monomorphism m and some two morphisms e and e', then $e = e'$, since m is a monomorphism.

The following fact about image factorizations are basic tools to construct the associated sheaf functor later.

[*2] We shall call a morphism which is a monomorphism and an epimorphism a *bimorphism*.

Fact 3.0.6 (image factorizations [2, Proposition IV.6.1, 2]). *In a topos, for any morphism $f : A \to B$, there exist an image $m : M \rightarrowtail B$ of f and an epimorphism $e : A \twoheadrightarrow M$ such that $f = me$. Moreover, images are determined up to isomorphism.* □

We shall say that the factorization $f = me$ as in Fact 3.0.6 *the image factorization* of f. More generally, we shall say that a factorization $f = me$ is *an epi-mono factorization* of f if m and e are monomorphism and epimorphism, respectively.

The following two facts (Fact 3.0.7 and Fact 3.0.8) related to epimorphisms in a topos are fundamental facts to investigate image factorizations.

Fact 3.0.7 ([2, Proposition IV.7.3]). *In a topos, the pullback of an epimorphism is an epimorphism.* □

Definition 3.0.4 (kernel pairs). Let $t : E \to W$ be a morphism in a category **C**. Then a pair (f, g) of two morphisms $f, g : B \to E$ is called the *kernel pair* of t if f and g are universal morphisms such that $tf = tg$, i.e., f and g make the following diagram a pullback:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & E \arrow[d, "t"] \\ E \arrow[r, "t"'] & W. \end{tikzcd}$$

Equivalently, the product $\langle f, g\rangle$ with $tf = tg$ is the kernel pair of t if the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "tf=tg"] \arrow[d, tail, "\langle f,g\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & W \arrow[d, tail, "\Delta_W"] \\ E \times E \arrow[r, "t\times t"'] & W \times W. \end{tikzcd}$$

Therefore, the kernel pair is represented by the pullback $(t\times t)^{-1}(\Delta_W)$ of the diagonal morphism Δ_W along $t \times t$. In particular, if t is a monomorphism, then the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "t"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & W \arrow[d, tail, "\Delta_W"] \\ E \times E \arrow[r, tail, "t\times t"'] & W \times W. \end{tikzcd}$$

That is, the kernel pair of t is represented by the diagonal morphism Δ_E. ◊

Fact 3.0.8 ([2, Theorem IV.7.8]). *In a topos, every epimorphism is the coequalizer of its kernel pair.* □

Fact 3.0.9. *In a topos, every epi-mono factorization of a morphism is the image factorization.* □

Proof. Let $f : A \to B$ be a morphism in a topos $\mathcal{E}$. Suppose that $f = me : A \twoheadrightarrow M \rightarrowtail B$ is an epi-mono factorization of f. We shall prove that $m : M \rightarrowtail B$ is the image of f. To this end, suppose that there exists another monomorphism $n : N \rightarrowtail B$ with a morphism $h : A \to N$ such that $f = nh$. By Fact 3.0.8, the epimorphism e is the coequalizer of its kernel pair, say, $k, k' : K \to A$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[r, shift right, "k'"'] & A \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "h"'] & M \arrow[r, tail, "m"] & B \\
& & N. \arrow[ur, tail, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

Then we have

$$nhk = mek = mek' = nhk'.$$

Since n is a monomorphism, we obtain $hk = hk'$, i.e., h coequalizes k and k'. Since e is the coequalizer of k and k', there exists a unique morphism $l : M \to N$ such that $le = h$. Then we have $me = nh = nle$. Since e is an epimorphism, we obtain $m = nl$. This implies that m is the image of f. The proof is complete. ■

Fact 3.0.10 (images are stable under pullbacks). *Let $f : A \to B$ and $g : C \to B$ be two morphisms in a topos $\mathcal{E}$ and $f = me : A \twoheadrightarrow M \rightarrowtail B$ the image factorization of f. Then the pullback $g^{-1}(m)$ of the image m along g is the image of the pullback of $g^{-1}(f)$ along g.* □

Proof. Put $n := g^{-1}(m) : N \rightarrowtail C$ for short. We shall prove that n is the image of $g^{-1}(f)$. Note that since $g(g^{-1}(f)) = me(f^{-1}(g))$, the pullback condition in the right-hand side of the rectangle below implies that there exists a unique morphism $h : D \to N$ such that $m^{-1}(g)h = ef^{-1}(g)$ and $nh = g^{-1}(f)$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dotted, "\exists ! h"] \arrow[rr, bend left, "g^{-1}(f)"] \arrow[d, "f^{-1}(g)"'] & N \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "m^{-1}(g)"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, two heads, "e"'] & M \arrow[r, tail, "m"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Since the above outer rectangle is a pullback diagram and the right-hand side of the rectangle is a pullback square, the left-hand side of the rectangle is also a pullback square, by the pasting lemma for pullback squares. By Fact 3.0.7, h is an epimorphism. Thus, we have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "g^{-1}(f)"] \arrow[dr, two heads, "h"] \arrow[dd, "f^{-1}(g)"'] & & C \arrow[dd, "g"] \\
& N \arrow[ur, tail, "n"'] \arrow[dd, "m^{-1}(g)"] & \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & B \\
& M. \arrow[ur, tail, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Therefore, $g^{-1}(f) = nh$ is an epi-mono factorization of $g^{-1}(f)$. By Fact 3.0.9, $n : N \rightarrowtail C$ is the image of $g^{-1}(f)$. The proof is complete. ■

The following fact will be used to prove that "the category of sheaves in a topos" has a subobject classifier.

Fact 3.0.11. *Let $m : A \rightarrowtail E$ be a monomorphism in a topos $\mathcal{E}$. Then $m^{-1}\exists_m = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(A)}$ holds, where $\exists_m(n) : \exists_m(N) \rightarrowtail E$ is the image of the composite nm for each subobject $n : N \rightarrowtail A$ of A.* □

Proof. Let $n : N \rightarrowtail A$ be a subobject of A. Consider the image factorization $mn = \exists_m(n)e : N \twoheadrightarrow \exists_m(N) \rightarrowtail E$ of mn as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "n"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E \\
& \exists_m(N). \arrow[ur, tail, "\exists_m(n)"'] &
\end{tikzcd}$$

Since both m and n are monomorphisms, mn is also a monomorphism. Since $\exists_m(n)e = mn$, e is also a monomorphism, Therefore, e is a bimorphism. Hence, e is an isomorphism, by Fact 3.0.5. Thus, $mn : N \rightarrowtail E$ and $\exists_m(n)$ are equivalent in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$. Consequently, the pullback $m^{-1}(\exists_m(n))$ of $\exists_m(n)$ along m is a pullback of mn along m as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
m^{-1}(\exists_m(N)) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "m^{-1}(\exists_m(n))"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \exists_m(N) \arrow[d, tail, "\exists_m(n)\cong mn"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & E.
\end{tikzcd}$$

Hence, we have $m^{-1}(\exists_m(n)) \cong m^{-1}(mn)$. On the other hand, note that the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "\mathrm{id}_N"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & N \arrow[d, tail, "mn"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & B.
\end{tikzcd}$$

This implies that $m^{-1}(mn) \cong n$ holds. Therefore, we have $m^{-1}(\exists_m(n)) \cong n$. Thus, we obtain $m^{-1}\exists_m = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(A)}$. The proof is complete. ■

The following fact will be used to prove that the associated sheaf functor preserves equalizers.

Fact 3.0.12 ([2, Proposition IV.7.7]). *In a topos, if $f : X \to Y$ and $g : W \to Z$ are epimorphisms, then so is $f \times g : X \times W \to Y \times Z$.* □

3.1 Lawvere-Tierney Topologies

In this section, we shall present the definition of Lawvere-Tierney topologies on a topos.

Definition 3.1.1 (Lawvere-Tierney Topologies). Let $\mathcal{E}$ be a topos and $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ a subobject classifier for $\mathcal{E}$. A *Lawvere-Tierney topology* on $\mathcal{E}$ is a morphism $j : \Omega \to \Omega$ satisfying the following three conditions:

(i) $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{true}"] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \Omega; \end{tikzcd}$$

(ii) $j \circ j = j$,

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \Omega; \end{tikzcd}$$

(iii) $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$,

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega, \end{tikzcd}$$

where $\wedge$ is the internal meet operation (see Definition 3.0.2). ◊

Definition 3.1.2 (closures). Let $\mathcal{E}$ be a topos, $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ a subobject classifier for $\mathcal{E}$ and $j : \Omega \to \Omega$ a morphism in $\mathcal{E}$. For each object E in $\mathcal{E}$ and each subobject $m : A \rightarrowtail E$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$, we define the *closure* $\overline{m} : \overline{A} \rightarrowtail E$ of $m : A \rightarrowtail E$ (for j) as the subobject of E making the outer square of the following diagram a pullback:

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[rrr, "!^{\overline{A}}"] \arrow[dd, tail, "\overline{m}"'] \arrow[ddrrr, phantom, "\text{p.b.}"] & & & 1 \arrow[dd, tail, "\mathrm{true}"] \\ & A \arrow[r, "!^{A}"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] & \\ E \arrow[r, "\mathrm{id}_E"'] & E \arrow[r, "\mathrm{char}(m)"'] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

That is, the classifying morphism for the closure $\overline{m} : \overline{A} \rightarrowtail E$ is given by

$$\mathrm{char}(\overline{m}) = j \circ \mathrm{char}(m). \tag{3.1.2}$$

We shall call the mapping assigning the closure $\overline{m} : \overline{A} \rightarrowtail E$ to each subobject $m : A \rightarrowtail E$ of E the *closure operator* (for j). ◊

Fact 3.1.1 (closure operators are natural). *In a topos, for each morphism $f : E \to F$ and each subobject $n : B \rightarrowtail F$ of F, the following holds:*

$$f^{-1}(\overline{B}) \cong \overline{f^{-1}(B)}, \tag{3.1.3}$$

in other words,

$$\mathrm{char}(f^{-1}(\overline{n})) = \mathrm{char}(\overline{f^{-1}(n)}). \tag{3.1.4}$$

□

Proof. Let $f : E \to F$ be a morphism and $n : B \rightarrowtail F$ a subobject of F. Then we have

$$\mathrm{char}(f^{-1}(\overline{n})) = \mathrm{char}(\overline{n}) \circ f = j \circ \mathrm{char}(n) \circ f = j \circ \mathrm{char}(f^{-1}(n)) = \mathrm{char}(\overline{f^{-1}(n)}).$$

The proof is complete. ∎

Definition 3.1.3 (closed subobjects and dense subobjects). Let E be an object in a topos $\mathcal{E}$. Then a subobject $m : A \rightarrowtail E$ of E is said to be *closed* (in E for j) if $\overline{m} \cong m$ (or $\overline{A} \cong A$), in other words, $\mathrm{char}(\overline{m}) = \mathrm{char}(m)$. Furthermore, $m : A \rightarrowtail E$ is said to be *dense* (in E for j) if $\overline{m} \cong \mathrm{id}_E$ (or $\overline{A} \cong E$), in other words, $\mathrm{char}(\overline{m}) = \mathrm{char}(\mathrm{id}_E)$. We shall also call a dense subobject $m : A \rightarrowtail E$ of E a dense monomorphism. ♢

Fact 3.1.2. *A morphism $j : \Omega \to \Omega$ in a topos $\mathcal{E}$ is a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$ iff the closure operator for j satisfies the following three conditions for any object E in $\mathcal{E}$, and any two subobjects $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ of E:*

(i) $A \leq \overline{A}$*;*
(ii) $\overline{\overline{A}} \cong \overline{A}$*;*
(iii) $\overline{A \wedge B} \cong \overline{A} \wedge \overline{B}$*.*

In other words,

(ia) $m \leq \overline{m}$*;*
(iia) $\mathrm{char}(\overline{\overline{m}}) = \mathrm{char}(\overline{m})$*;*
(iiia) $\mathrm{char}(\overline{m \wedge n}) = \mathrm{char}(\overline{m} \wedge \overline{n})$*.*

Moreover, if the closure operator satisfies the condition (iii)*, the closure operator is order-preserving, i.e., for any two subojbects $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ of E, if $A \leq B$, then $\overline{A} \leq \overline{B}$.* □

Proof. Let $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ be a subobjects classifier for $\mathcal{E}$.

($j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true} \Leftrightarrow$ ((i), (ia))) Suppose that j satisfies the condition $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$. Let $m : A \rightarrowtail E$ be a subobject of E. Since $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$, we have

$$\mathrm{char}(\overline{m}) \circ m = j \circ \mathrm{char}(m) \circ m = j \circ \mathrm{true} \circ !^A = \mathrm{true} \circ !^A.$$

Hence, there exists a unique morphism $d_m : A \to \overline{A}$ such that $m = \overline{m} d_m$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "\exists ! d_m"] \arrow[drr, bend left, "!^A"] \arrow[ddr, tail, bend right, "m"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \overline{A} \arrow[r, tail, "!^{\overline{A}}"] \arrow[d, tail, "\overline{m}"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
& E \arrow[r, "\mathrm{char}(\overline{m})"'] & \Omega.
\end{tikzcd} \tag{3.1.5}$$

Therefore, we obtain $m \leq \overline{m}$.

Conversely, consider the monomorphism $!^1 : 1 \rightarrowtail 1$. Note that $!^1 = \mathrm{id}_1$. Hence, we have $\mathrm{char}(!^1) = \mathrm{true} \circ !^1$. On the other hand, since $!^1 = \mathrm{id}_1$ is the maximum subobject in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$, by (i) or (ia), we have $\mathrm{char}(\overline{!^1}) = \mathrm{char}(!^1)$. Therefore, we have

$$j \circ \mathrm{true} = \mathrm{char}(\overline{!^1}) = \mathrm{char}(!^1) = \mathrm{true} :$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{1} \arrow[rrr, "!^{\overline{1}}"] \arrow[dd, tail, "!^{\overline{1}}"'] \arrow[drrr, phantom, "\text{p.b.}"] & & & 1 \arrow[dd, tail, "\mathrm{true}"] \\
& 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "!^1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] & \\
1 \arrow[r, "\mathrm{id}_1"'] & 1 \arrow[r, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

($j \circ j = j \Leftrightarrow$ ((ii), (iia))) Let $m : A \rightarrowtail E$ be a subobject of E. Then we have

$$\mathrm{char}(\overline{\overline{m}}) = j \circ \mathrm{char}(\overline{m}) = j \circ j \circ \mathrm{char}(m). \tag{3.1.6}$$

Suppose that $j \circ j = j$. Then we have $\mathrm{char}(\overline{\overline{m}}) = j \circ \mathrm{char}(m) = \mathrm{char}(\overline{m})$.

Conversely, suppose that j satisfies (ii) or (iia). Note that the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
\Omega \arrow[r, "\mathrm{id}_\Omega"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Hence, we have $\mathrm{char}(\mathrm{true}) = \mathrm{id}_\Omega$. Taking the subobject $m = \mathrm{true}$ in (3.1.6), we have

$$\mathrm{char}(\overline{\overline{\mathrm{true}}}) = j \circ \mathrm{char}(\overline{\mathrm{true}}) = j \circ j \circ \mathrm{char}(\mathrm{true}) = j \circ j.$$

On the other hand, by (ii) or (iia), we have

$$\mathrm{char}(\overline{\overline{\mathrm{true}}}) = \mathrm{char}(\overline{\mathrm{true}}) = j \circ \mathrm{char}(\mathrm{true}) = j.$$

Thus, we obtain $j \circ j = j$.

(($j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j) \Leftrightarrow$ ((iii), (iiia))) Let $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ be two subobjects of E. Then we have

$$\mathrm{char}(\overline{m \wedge n}) = j \circ \mathrm{char}(m \wedge n) = j \circ \wedge \circ \langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle. \tag{3.1.7}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{char}(\overline{m} \wedge \overline{n}) &= \wedge \circ \langle \mathrm{char}(\overline{m}), \mathrm{char}(\overline{n}) \rangle = \wedge \circ \langle j \circ \mathrm{char}(m), j \circ \mathrm{char}(n) \rangle \\ &= \wedge \circ (j \times j) \circ \langle \mathrm{char}(m), \mathrm{char}(n) \rangle. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

If $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$, then we have $\mathrm{char}(\overline{m \wedge n}) = \mathrm{char}(\overline{m} \wedge \overline{n})$, by (3.1.7) and (3.1.8).

Conversely, suppose that $\mathrm{char}(\overline{m \wedge n}) = \mathrm{char}(\overline{m} \wedge \overline{n})$. Taking $m = n = \mathrm{true}$ in (3.1.7) and (3.1.8), we obtain $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$.

Finally, we shall prove that the closure operator is order-preserving if it satisfies the condition (iii). To this end, let $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail E$ be two subobjects of E in $\mathcal{E}$. If $A \leq B$, then $A \cong A \wedge B$. By (iii), we obtain $\overline{A} \cong \overline{A \wedge B} \cong \overline{A} \wedge \overline{B} \leq \overline{B}$, i.e., $\overline{A} \leq \overline{B}$. The proof is complete. ■

We note that if j satisfies the conditions (i) and (ii), the monomorphism $d_m : A \rightarrowtail \overline{A}$ in (3.1.5) is dense. Accordingly, we shall call d_m the *canonical dense monomorphism* for m.

Remark 3.1.1. Since the inequality $A \leq \overline{A}$ is equivalent to the condition $A \wedge \overline{A} \cong A$, the above condition (i) can be written by the following equation:

$$\wedge \circ (\mathrm{id}_\Omega \times j) \circ \Delta_\Omega = \mathrm{id}_\Omega. \tag{3.1.9}$$

◊

Fact 3.1.3. *Let $\mathcal{E}$ be a topos and j a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$. Let $d : A \rightarrowtail E$ be a dense monomorphism and $f : F \to E$ a morphism in $\mathcal{E}$. Then the pullback $f^{-1}(d)$ of d along f is dense.* □

Proof. Recall that the condition that $d : A \rightarrowtail E$ is dense is defined as $\mathrm{char}(\overline{d}) = j \circ \mathrm{char}(d) = \mathrm{char}(\mathrm{id}_E)$. Note that $\mathrm{char}(f^{-1}(d)) = \mathrm{char}(d) \circ f$. Note also that the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_F"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & E \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \\ F \arrow[r, "f"'] & E. \end{tikzcd}$$

This implies that $\mathrm{char}(f^{-1}(\mathrm{id}_E)) = \mathrm{char}(\mathrm{id}_F)$. From the above, we obtain

$$\begin{aligned} \mathrm{char}(\overline{f^{-1}(d)}) &= j \circ \mathrm{char}(f^{-1}(d)) \\ &= j \circ \mathrm{char}(d) \circ f \\ &= \mathrm{char}(\mathrm{id}_E) \circ f \\ &= \mathrm{char}(f^{-1}(\mathrm{id}_E)) \\ &= \mathrm{char}(\mathrm{id}_F). \end{aligned}$$

The proof is complete. ■

Fact 3.1.4. *Let $\mathcal{E}$ be a topos and j a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$. Let E and F be two objects in $\mathcal{E}$. Let $m : A \rightarrowtail E$ and $n : B \rightarrowtail F$ be subobjects of E and F, respectively. Then the closure of the cartesian product $m \times n : A \times B \rightarrowtail E \times F$ is given by the cartesian products of the closures $\overline{m} : \overline{A} \rightarrowtail E$ and $\overline{n} : \overline{B} \rightarrowtail F$, i.e., $\overline{m \times n} \cong \overline{m} \times \overline{n}$, in other words, $\mathrm{char}(\overline{m \times n}) = \mathrm{char}(\overline{m} \times \overline{n})$. In particular, if m and n are closed or dense, then the cartesian products $m \times n$ is also closed or dense, as the case may be.* □

Proof. First, we shall prove the following equation:

$$\mathrm{char}(m \times n) = \wedge \circ (\mathrm{char}(m) \times \mathrm{char}(n)). \tag{3.1.10}$$

To this end, by the pasting lemma for pullback squares, it is sufficient to prove that the following both left-hand side and right-hand side of the outer rectangle are pullback squares:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "!^{A\times B}"] \arrow[d, tail, "m\times n"'] \arrow[drr, phantom, "\text{p.b.}"] & & 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{true},\mathrm{true}\rangle"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \times F \arrow[rr, tail, "\mathrm{char}(m)\times\mathrm{char}(n)"'] & & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

We shall only prove that the left hand-side of the outer rectangle of the above diagram is a pullback square. To prove this, suppose that there exists a morphism $u : X \to E \times F$ such that $(\mathrm{char}(m) \times \mathrm{char}(n))u = \langle \mathrm{true}, \mathrm{true}\rangle \circ !^X$. We must prove that there exists a unique morphism $l : X \to A \times B$ such that $(m \times n)l = u$. By taking each component of each side of $(\mathrm{char}(m) \times \mathrm{char}(n))u = \langle \mathrm{true}, \mathrm{true}\rangle \circ !^X$, we have

$$\mathrm{char}(m)\pi_1 u = \mathrm{true} \circ !^X \quad \text{and} \quad \mathrm{char}(n)\pi_2 u = \mathrm{true} \circ !^X,$$

where $\pi_1 : E \times F \to E$ and $\pi_2 : E \times F \to F$ are the projections. Note that the following both two diagrams are pullback squares:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
E \arrow[r, "\mathrm{char}(m)"'] & \Omega,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
F \arrow[r, "\mathrm{char}(n)"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Hence, there exists a unique morphisms $l_1 : X \to A$ and a unique morphism $l_2 : X \to B$ such that $ml_1 = \pi_1 u$ and $nl_2 = \pi_2 u$, respectively. Therefore, we have

$$(m \times n)\langle l_1, l_2\rangle = \langle ml_1, nl_2\rangle = \langle \pi_1 u, \pi_2 u\rangle = u.$$

To prove the uniqueness, suppose that there exists another morphism $l : X \to A \times B$ such that $(m \times n)l = u$. Then we have

$$m\pi_1' l = \pi_1 u \quad \text{and} \quad m\pi_2' l = \pi_2 u,$$

where $\pi_1 : A \times B \to A$ and $\pi_2 : A \times B \to B$ are the projections. Recall that two morphisms l_1 and l_2 are unique ones such that $ml_1 = \pi_1 u$ and $nl_2 = \pi_2 u$, respectively. Hence, we have $\pi_1' l = l_1$ and $\pi_2' l = l_2$. Therefore, we obtain $l = \langle l_1, l_2\rangle$. This completes the proof of (3.1.10). Thus, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathrm{char}(\overline{m \times n}) &= j \circ \mathrm{char}(m \times n) \\
&= j \circ \wedge \circ (\mathrm{char}(m) \times \mathrm{char}(n)) \quad (\text{by } (3.1.10)) \\
&= \wedge \circ (j \times j) \circ (\mathrm{char}(m) \times \mathrm{char}(n)) \quad (\text{by } j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)) \\
&= \wedge \circ (\mathrm{char}(\overline{m}) \times \mathrm{char}(\overline{n})) \\
&= \mathrm{char}(\overline{m} \times \overline{n}) \quad (\text{by } (3.1.10))
\end{aligned}$$

The proof is complete. ■

Theorem 3.1.1. *Let* $(\mathbf{C}, J)$ *be a site,* true : $1 \rightarrowtail \Omega$ *a subobject classifier for the presheaf category* $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$*. Then a morphism* $j : \Omega \to \Omega$ *defined for a sieve* S *on* $C \in \mathbf{C}$ *by*

$$j_C(S) = \{g : \mathrm{dom}(g) \to C \mid g^*(S) \in J(\mathrm{dom}(g))\} \tag{3.1.11}$$

is a Lawvere-Tierney topology on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ [*3] *.* □

Proof. Recall that the truth value object Ω of $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ is given by

$$\Omega C = \{S \mid S \text{ is a sieve on } C\} \quad \text{for an object } C \text{ in } \mathbf{C},$$

$$\Omega f : \Omega C \ni f \mapsto f^*(S) \in \Omega D \quad \text{for a morphism } f : D \to C \text{ in } \mathbf{C}.$$

First, we must verify the well-definedness of j, i.e., $j_C(S)$ is a sieve on C for each $C \in \mathbf{C}$ and each $S \in \Omega C$. To this end, let $C \in \mathbf{C}$, $S \in \Omega C$, $g : D \to C \in j_C(S)$ and $h : D' \to D \in \mathbf{C}$. Then $g^*(S) \in J(D)$, by $g \in j_C(S)$. By the stability axiom of J, we have $(gh)^*(S) = h^*(g^*(S)) \in J(D')$. Hence, $gh \in j_C(S)$. Therefore, $j_C(S)$ is a sieve on C, i.e., $j_C(S) \in \Omega C$.

Next, we shall prove the naturality of j, i.e., for each $f : D \to C \in \mathbf{C}$, the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} \Omega C \arrow[r, "j_C"] \arrow[d, "\Omega f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega C \arrow[d, "\Omega f"] \\ \Omega D \arrow[r, "j_D"'] & \Omega D. \end{tikzcd}$$

To this end, let $f : D \to C \in \mathbf{C}$ and $S \in \Omega C$. Then we have

$$\begin{aligned} (\Omega f)(j_C(S)) = f^*(j_C(S)) &= \{g : D' \to D \mid fg \in j_C(S)\} \\ &= \{g : D' \to D \mid (fg)^*(S) \in J(D')\} \\ &= \{g : D' \to D \mid g^*(f^*(S)) \in J(D')\} \\ &= j_D(f^*(S)) = j_D(\Omega f(S)). \end{aligned}$$

Now, we shall examine two basic facts about j. Let S and T be two sieves on C. We claim that j is order-preserving, i.e., if $S \subseteq T$, then $J_C(S) \subseteq j_C(T)$, and $S \subseteq j_C(S)$. To prove that j is order-preserving, let $g : D \to C \in j_C(S)$, i.e., $g^*(S) \in J(D)$ and $S \subseteq T$. Since $g^*(S) \subseteq g^*(T)$, we have $g^*(T) \in J(D)$ (see Fact 3.1.1 in [4]). Therefore, $g \in j_C(T)$. To prove that $S \subseteq j_C(S)$, let $f : D \to C \in S$. Then $f^*(S) = t_D \in J(D)$, where t_D is the maximal sieve on D. Therefore, $f \in j_C(S)$.

Finally, we shall prove that j is a Lawvere-Tierney topology on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$.

($j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$) Let $C \in \mathbf{C}$. Recall that the truth arrow assign the maximal sieve to a set $*$, i.e., $\mathrm{true}_C(*) = t_C$. Hence, it is sufficient to prove that $j_C(t_C) = t_C$. Since for all $g : D \to C \in t_C$, $g^*(t_C) = t_D \in J(D)$, we obtain $j_C(t_C) = \{g : D \to C \mid g^*(t_C) \in J(D)\} = t_C$.

[*3] Recall that for a sieve S on $C \in \mathbf{C}$ and a morphism $g : D \to C$ in $\mathbf{C}$, $g^*(S) = \{h : D' \to D \mid gh \in S\}$.

($j \circ j = j$)　Let $C \in \mathbf{C}$ and $S \in \Omega C$. By the above fact, we have $S \subseteq j_C(S)$. Since j is order-preserving, we obtain $j_C(S) \subseteq j_C(j_C(S))$. For the converse inclusion, let $g : D \to C \in j_C(j_C(S))$. Then $g^*(j_C(S)) \in J(D)$, by the definition of j. On the other hand, we have

$$\begin{aligned} g^*(j_C(S)) &= \{h : D' \to D \mid gh \in j_C(S)\} \\ &= \{h : D' \to D \mid h^*(g^*(S)) \in J(D')\} . \end{aligned}$$

This implies that for all $h : D' \to D \in g^*(j_C(S)) \in J(D)$, we have $h^*(g^*(S)) \in J(D')$. By the transitivity axiom of J, we have $g^*(j_C(S)) \in J(D)$, i.e., $g \in j_C(S)$. Therefore, we have $j_C(j_C(S)) \subseteq j_C(S)$. From the above, we obtain $j \circ j = j$.

($j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$)　Let $C \in \mathbf{C}$ and $S, T \in \Omega C$. By Fact 3.0.4, it is sufficient to prove that $j_C(S \cap T) = j_C(S) \cap j_C(T)$. Since $S \cap T \subseteq S, T$ and j is order-preserving, we have $j_C(S \cap T) \subseteq j_C(S), j_C(T)$. Hence, $j_C(S \cap T) \subseteq j_C(S) \cap j_C(T)$. For the converse, recall that for all $g : D \to C \in \mathbf{C}$, if $g^*(S), g^*(T) \in J(D)$, then $g^*(S \cap T) \in J(D)$ (see Fact 3.1.4 in [4]). From the above, we obtain $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$.

The proof is complete. ■

In accordance with Theorem 3.1.1, we shall call the Lawvere-Tierney topology j on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ determined by a Grothendieck topology J via the equation (3.1.11) the *Lawvere-Tierney topology induced* by J.

3.2 Sheaves

Let $\mathcal{E}$ be a topos and j a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$.

Definition 3.2.1 (sheaves for a Lawvere-Tierney topology). An object G in $\mathcal{E}$ is said to be *separated* for j, if for every dense subobject $m : A \rightarrowtail E$, the following mapping is injective:

$$m_G^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G) \ni f \mapsto f \circ m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, G). \tag{3.2.1}$$

Moreover, an object F in $\mathcal{E}$ is called a *sheaf* for j (or j-sheaf for short), if for every dense subobject $m : A \rightarrowtail E$, the following mapping is bijective:

$$m_F^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, F) \ni f \mapsto f \circ m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, F). \tag{3.2.2}$$

We shall write $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ and $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ for the full subcategory of $\mathcal{E}$ given by all the separated objects for j and by all the sheaves for j, respectively. We shall denote the inclusion functor from $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ to $\mathcal{E}$ by $i : \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$. ◊

By definition, sheaves for j are separated for j. Therefore, $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ is a full subcategory of $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$. We shall denote the inclusion functor from $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ to $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ by $i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$. Similarly, we shall denote the inclusion functor from $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ to $\mathcal{E}$ by $i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sep}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$.

The aim of the rest in this section is to prove the following theorem:

Theorem 3.2.1. *Let $\mathcal{E}$ be a topos and j a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$. Then $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ is a topos. Moreover, the inclusion functor $i : \mathrm{Sh}_j \hookrightarrow \mathcal{E}$ is left exact and preserves exponentials.* □

Lemma 3.2.1. *Both $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ and $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ are closed under limits. Let G be separated for j, F a sheaf for j and B an object in $\mathcal{E}$. Then the exponentials G^B and F^B are separated and a sheaf for j, respectively. In particular, the inclusion functor $i : \mathrm{Sh}_j \hookrightarrow \mathcal{E}$ is left exact and preserves exponentials.* □

Proof. First, we shall prove that both $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ and $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ are closed under limits. To this end, it is sufficient to prove that equalizers in $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ or $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ are separated objects or sheaves for j, as the case may be, and products in $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ or $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ are separated or sheaves for j, as the case may be. Throughout this proof, let $m : A \rightarrowtail E$ be a dense subobject of E. We remark that the terminal object 1 is a sheaf for j. Indeed, by the universal mapping property of the terminal object,

$$m_1^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, 1) \ni\, !^E \mapsto\, !^A \circ m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, 1)$$

is bijective, where $!^E : E \to 1$ is a unique morphism from E to the terminal object. Hence, $1 \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ and $1 \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$.

Next, we shall prove that equalizers in $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ or $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ are separated or a sheaf for j, as the case may be. To this end, let $\alpha, \beta : G \to H$ be two morphisms in $\mathcal{E}$ and $e : C \to G$ the equalizer of α and β. We shall prove that C is separated for j. To this end, let $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, C)$ be such that $m_C^*(f) = m_C^*(g)$, i.e., $fm = gm$. Then we have

$$m_G^*(ef) = efm = egm = m_G^*(eg) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, G).$$

Since G is separated, m_G^* is injective. Hence, we have $ef = eg$. Since e is a monomorphism, we obtain $f = g$. Therefore, m_C^* is injective, i.e., C is separated. We shall prove that C is a sheaf for j if G is a sheaf for j and H is separated. To this end, let $n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, C)$. Since $m_G^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, G)$ is surjective, there exists a morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G)$ such that $m_G^*(f) = en$. On the other hand, since e is the equalizer of α and β, we have

$$m_H^*(\alpha f) = \alpha f m = \alpha e n = \beta e n = \beta f m = m_H^*(\beta f).$$

Since m_H^* is injective, we have $\alpha f = \beta f$, i.e., f equalizes α and β. Since e is the equalizer of α and β, there exists a morphism $l : E \to C$ such that $el = f$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & H. \\ E \arrow[u, dotted, "l"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Recall that $fm = en$. Hence, $elm = fm = en$. Since e is a monomorphism, we obtain $m_C^*(l) = lm = n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, C)$. This implies that m_C^* is surjective. As we have seen in the above, m_C^* is injective. From the above, m_C^* is bijective. Thus, C is a sheaf for j.

Next, we shall prove that the small product $\prod_{i\in I} G_i$ of $\{G_i\}_{i\in I}$ is separated if G_i are separated for all $i \in I$. To this end, let $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \prod_{i\in I} G_i)$ be such that $m^*_{\prod_{i\in I} G_i}(f) = m^*_{\prod_{i\in I} G_i}(g)$, i.e., $fm = gm$. Let $\pi_i (i \in I)$ be projections from the product $\prod_{i\in I} G_i$ to G_i. Then we have

$$m^*_{G_i}(\pi_i f) = \pi_i fm = \pi_i gm = m^*(\pi_i g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G_i) \quad (i \in I).$$

Since $G_i \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}\ (i \in I)$, $m^*_{G_i}(i \in I)$ are injective. Hence, we have $\pi_i f = \pi_i g\ (i \in I)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dotted, "f{,}g"'] \arrow[dr, "\pi_i f = \pi_i g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\ \prod_{i\in I} G_i \arrow[r, "\pi_i"'] & G_i. \end{tikzcd}$$

By the universal mapping property of the product $\prod_{i\in I} G_i$, we obtain $f = g$. Hence, $m^*_{\prod_{i\in I} G_i}$ is injective. Therefore, $\prod_{i\in I} G_i$ is separated.

We shall prove that the $\prod_{i\in I} G_i$ is a sheaf for j if G_i are sheaves for j for all $i \in I$. To this end, let $n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \prod_{i\in I} G_i)$. Since $G_i \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}\ (i \in I)$, $m^*G_i\ (i \in I)$ are surjective. Hence, there exist morphisms $h_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G_i)\ (i \in I)$ such that $m^*_{G_i}(h_i) = h_i m = \pi_i n\ (i \in I)$. By the universal mapping property of the product $\prod_{i\in I} G_i$, there exists a unique morphism $l \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \prod_{i\in I} G_i)$ such that $\pi_i l = h_i (i \in I)$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dotted, "l"'] \arrow[dr, "\pi_i n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\ \prod_{i\in I} G_i \arrow[r, "\pi_i"'] & G_i. \end{tikzcd}$$

Hence, we have

$$\pi_i lm = h_i m = \pi_i n \quad (i \in I).$$

By the universal mapping property of the product $\prod_{i\in I} G_i$ again, we obtain $m^*_{\prod_{i\in I} G_i}(l) = lm = n$. Therefore, $m^*_{\prod_{i\in I} G_i}$ is surjective.

Finally, we shall prove that the exponential G^B is separated or sheaf for j if G is separated or sheaf for j, as the case may be. By the natural bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \times G^B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E \times B, G)$, we have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G^B) \arrow[r, "m^*_{G^B}"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, G^B) \arrow[d, equal, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E \times B, G) \arrow[r, "(m\times \mathrm{id}_B)^*_G"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A \times B, G). \end{tikzcd}$$

Therefore, it is sufficient to prove that $m \times \mathrm{id}_B : A \times B \rightarrowtail E \times B$ is dense. Note that the following pullback diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi'_A"] \arrow[d, tail, "m \times \mathrm{id}_B"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "m"] \\ E \times B \arrow[r, "\pi_E"'] & E. \end{tikzcd}$$

By Fact 3.1.3, the pullback $m \times \mathrm{id}_E$ of m along π_E is dense, since m is dense. Therefore, $G \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ or $G \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ implies that $(m \times \mathrm{id}_B)^*_G$ is injective or bijective, as the case may be. The proof is complete. ■

We shall investigate a subobject classifier for $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. Consider the equalizer $e_j : \Omega_j \rightarrowtail \Omega$ of j and id_Ω as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \Omega_j \arrow[r, "e_j"] & \Omega \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_\Omega"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.2.3}$$

As we shall see later, Ω_j is a subobject classifier for $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. Since $j \circ j = j$, the morphism j also equalizes j and id_Ω. Hence, by the universal mapping property of the equalizer e_j, there exists a unique morphism $r : \Omega \to \Omega_j$ such that $e_j r = j$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \Omega_j \arrow[r, "e_j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_\Omega"'] & \Omega. \\ \Omega \arrow[u, dotted, "r"] \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

Hence, we have $(e_j r)e_j = je_j = e_j$. Since the equalizer e_j is mono, we have $re_j = \mathrm{id}_{\Omega_j}$, i.e., r is a retraction of $e_j : \Omega_j \to \Omega$. In particular, r is an epimorphism. Therefore, we obtain an epi-mono factorization $j = e_j r$ of j. We recall that in a topos, every epi-mono factorization is the image factorization. Therefore, $e_j : \Omega_j \to \Omega$ is the image of j, i.e., e_j is the least subobject of Ω through which j factor.

Since $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$, i.e., true equalizes j and id_Ω, and e_j is the equalizer of j and id_{Ω_j}, there exists a monomorphism $\mathrm{true}_j : 1 \rightarrowtail \Omega_j$ such that $e_j \circ \mathrm{true}_j = \mathrm{true}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, dotted, tail, "\mathrm{true}_j"'] \arrow[dr, tail, "\mathrm{true}"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & & \\ \Omega_j \arrow[r, "e_j"'] & \Omega \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_\Omega"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

We shall denote the class of all closed subobjects of E by $\mathrm{ClSub}_\mathcal{E}(E)$.

Lemma 3.2.2. *The monomorphism* $\mathrm{true}_j : 1 \rightarrowtail \Omega_j$ *classifies* $\mathrm{ClSub}_\mathcal{E}(E)$ *for each object E in $\mathcal{E}$. Moreover, for each closed subobject $m : A \rightarrowtail E$ of E, the classifying morphism for m is the composite* $r \circ \mathrm{char}(m)$ *for each object $E \in \mathcal{E}$, which is natural in $E \in \mathcal{E}$.* □

Proof. Let $m : A \rightarrowtail E$ be a closed subobject of E, i.e., $j \circ \mathrm{char}(m) = \mathrm{char}(m)$.

Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, tail, "\mathrm{true}_j"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ E \arrow[r, "r\mathrm{char}(m)"'] & \Omega_j \arrow[r, "e_j"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

First, we shall prove that the right-hand side of the diagram (3.2.4) is a pullback square. To this end, suppose that there exists a morphism $u : X \to \Omega_j$ such that $e_j \circ u = \mathrm{true} \circ !^X$. Since $\mathrm{true} = e_j \circ \mathrm{true}_j$ holds, we have $e_j \circ u = e_j \circ \mathrm{true}_j \circ !^X$. Since e_j is a monomorphism, we obtain $u = \mathrm{true}_j \circ !^X$. This implies that the above square is a pullback square.

Next, consider the outer rectangle of (3.2.4). Since $m : A \rightarrowtail E$ is closed and, since j has the image factorization $j = e_j r$, the outer rectangle of (3.2.4) is a pullback diagram. By the pasting lemma for pullback squares, the left-hand side of (3.2.4) is also a pullback square.

Conversely, suppose that a morphism $\chi_m : E \to \Omega_j$ makes the following left-hand side of the diagram below a pullback square:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{p.b.}"] & 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_1"] \arrow[d, tail, "\mathrm{true}_j"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ E \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega_j \arrow[r, "e_j"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

As we have seen in the above, the right-hand side of the above diagram is a pullback square. By the pasting lemma for pullback squares, the outer rectangle is also a pullback diagram. Hence, we have $e_j \circ \chi_m = \mathrm{char}(m)$. Since r is a retraction of e_j, i.e., $re_j = \mathrm{id}_{\Omega_j}$, we obtain $\chi_m = r \circ \mathrm{char}(m)$. Thus, $r \circ \mathrm{char}(m)$ is the classifying morphism for the closed subobject $m : A \rightarrowtail E$.

Finally, we shall give the bijection ξ_E from $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j)$ to $\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$ explicitly. To this end, we set

$$\xi_E : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \ni \chi \mapsto \chi^{-1}(\mathrm{true}_j) \in \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E).$$

For the inverse ξ_E^{-1}, we set

$$\xi_E^{-1} : \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E) \ni m \mapsto r \circ \mathrm{char}(m) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j).$$

In fact, we have

$$\xi_E{}^{-1}(\xi_E(\chi)) = r \circ \mathrm{char}(\chi^{-1}(\mathrm{true}_j)) = r \circ e_j \circ \chi = \chi,$$

for each $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j)$, and since the outer rectangle of (3.2.4) is a pullback diagram, we have

$$\xi_E(\xi_E^{-1}(m)) = \xi_E(r \circ \mathrm{char}(m)) = (r \circ \mathrm{char}(m))^{-1}(\mathrm{true}_j) = m$$

for each $m \in \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$. The proof is complete. ■

Lemma 3.2.3. *Let $m : A \rightarrowtail E$ be a dense subobject of E. Then the inverse image map*

$$m^{-1} : \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E) \ni v \mapsto m^{-1}(v) \in \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(A) \tag{3.2.5}$$

is an isomorphism. □

Proof. Define a proposed inverse $m_i : \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(A) \to \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$ to m^{-1} by setting

$$m_i(u) := \overline{\exists_m(u)} \quad (u : U \rightarrowtail A \in \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(A)),$$

where $\exists_m(u)$ is the image of the composite mu and the closure is taken in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$. Since the closure operator is natural, $u : U \rightarrowtail A$ is closed and, since we have $m^{-1}\exists_m = \mathrm{id}_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(A)}$, we obtain

$$m^{-1}(m_i(u)) = m^{-1}(\overline{\exists_m(u)}) \cong \overline{m^{-1}(\exists_m(u))} \cong \overline{u} \cong u.$$

Conversely, let $v : V \rightarrowtail E$ be a closed subobject of E. Note that $m^{-1}(v) \cong v \wedge m$ as in the following pullback square:

$$\begin{tikzcd}
m^{-1}(V) \arrow[r, tail, "v^{-1}(m)"] \arrow[d, tail, "m^{-1}(v)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \arrow[d, tail, "v"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & E.
\end{tikzcd}$$

We claim that $v \wedge m \cong \exists_m(v \wedge m)$. Indeed, note that $\exists_m(v \wedge m)$ is the image of the monomorphism $m(m^{-1}(v))$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \wedge A \arrow[r, tail, "m^{-1}(v)"] \arrow[dr, "e"'] & A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E \\
& \exists_m(V \wedge A). \arrow[ur, tail, "\exists_m(m^{-1}(v))"'] &
\end{tikzcd}$$

This implies that e in the image factorization is an epimorphism and a monomorphism, i.e., a bimorphism. Hence, e is an isomorphism. Therefore, we have $v \wedge m \cong \exists_m(v \wedge m)$. Since $m : A \rightarrowtail E$ is dense and $\overline{v} : \overline{V} \rightarrowtail E$ is closed, we obtain

$$m_i(m^{-1}(v)) = \overline{\exists_m(m^{-1}(v))} \cong \overline{\exists_m(v \wedge m)} \cong \overline{v \wedge m} \cong \overline{v} \wedge \overline{m} \cong \overline{v} \wedge \mathrm{id}_E \cong \overline{v} \cong v.$$

Therefore, m_i is the inverse of m^{-1}. The proof is complete. ■

Lemma 3.2.4. *Let E be a sheaf for j and $m : A \rightarrowtail E$ a subobject of E. Then A is closed iff A is a sheaf for j.* □

Proof. Suppose that A is a sheaf for j. Consider the canonical dense monomorphism $d_m : A \rightarrowtail \overline{A}$ for m. By assumption, the following mapping

$$(d_m)^*_A : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\overline{A}, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, A)$$

is bijective. Hence, for $\mathrm{id}_A : A \to A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, A)$, there exists a morphism $r \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\overline{A}, A)$ such that $rd_m = \mathrm{id}_A$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, tail, "d_m"'] & A \arrow[d, tail, "m"] \\
\overline{A} \arrow[r, "\overline{m}"'] \arrow[ur, dotted, "r"] & E.
\end{tikzcd}$$

On the other hand, the canonical dense monomorphism satisfies that $\overline{m}d_m = m$. Therefore, we have $mrd_m = m = \overline{m}d_m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, E)$, i.e., $(d_m)^*_E(mr) = (d_m)^*_E(\overline{m})$. Since E is a sheaf for j, $(d_m)^*_E$ is bijective. Thus, we obtain $mr = \overline{m}$. Since $\overline{m}$ is a monomorphism, this implies that r is also a monomorphism. On the other hand, since $rd_m = \mathrm{id}_A$, r is an isomorphism. Indeed, $rd_m = \mathrm{id}_A$ implies that $rd_m r = r$. Since r is a monomorphism, we have $d_m r = \mathrm{id}_{\overline{A}}$. Therefore, r satisfies that $rd = \mathrm{id}_A$ and $d_m r = \mathrm{id}_{\overline{A}}$, i.e., $r : \overline{A} \to A$ is an isomorphism. Thus, $A \cong \overline{A}$, i.e., A is closed.

Conversely, suppose that A is a closed subobject of E. To prove that A is a sheaf for j, let $d : D \rightarrowtail B$ be a dense monomorphism and $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, A)$. We shall prove that there exists a unique morphism $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, A)$ such that $d^*_A(h) = f$. Since E is a sheaf for j,

$$d^*_E : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, E)$$

is bijection. Hence, for $mf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, E)$, there exists a unique morphism $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, E)$ such that $gd = mf$. Now, consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rrd, bend left, "f"] \arrow[rd, dotted, "\exists!"] \arrow[rd, tail, bend right, "d"'] & & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & g^{-1}(A) \arrow[r, "m^{-1}(g)"] \arrow[d, tail, "g^{-1}(m)"'] \arrow[rd, phantom, "\text{p.b.}"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[d, tail, "m"] \\
 & B \arrow[r, "g"'] & E.
\end{tikzcd}$$

From the above diagram, we have $D \leq g^{-1}(A)$. Since $d : D \to B$ is dense and the closure operator is natural, in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(B)$ we obtain the following ordering:

$$B \cong \overline{D} \leq \overline{g^{-1}(A)} \cong g^{-1}(\overline{A}) \cong g^{-1}(A).$$

Hence, there exists a morphism $t : B \to g^{-1}(m)$ such that $g^{-1}(m)t = \mathrm{id}_B$. Put $h := m^{-1}(g)t$ for short. Note that $m(m^{-1}(g)) = g(g^{-1}(m))$ as in the above diagram. Therefore, we have

$$mhd = m(m^{-1}(g))td = g(g^{-1}(m))td = gd = mf.$$

Since m is a monomorphism, we obtain $hd = f$. We shall prove that h is the unique morphism such that $hd = f$. To this end, suppose that there exists another morphism $k : B \to A$ such that $kd = f$. Then we have

$$mkd = mf = gd = g\mathrm{id}_B d = g(g^{-1}(m))td = m(m^{-1}(g))td \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, E),$$

that is, $d_E^*(mk) = d_E^*(mm^{-1}(g)t)$. Since E is a sheaf for j, d_E^* is bijective. Hence, we have $mk = mm^{-1}(g)t$. Since m is a monomorphism, we obtain $k = m^{-1}(g)t = h$. Therefore, h is the unique morphism such that $hd = f$, i.e., $d_A^*(h) = f$. Thus, d_A^* is an isomorphism. The proof is complete. ■

Now, we shall prove Theorem 3.2.1. First, by Lemma 3.2.1, $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ has (finite) limits and exponentials, and these operations are preserved by the inclusion functor i.

Next, we shall prove that Ω_j is a sheaf for j. Let $m : A \rightarrowtail E$ be a dense monomorphism. By Lemma 3.2.2, Ω_j classifies closed subobjects, i.e., there exists a bijection

$$\xi_E : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \to \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$$

for each object E in $\mathcal{E}$, which is natural in $E \in \mathcal{E}$. Note that for any $n : N \rightarrowtail E$, we have $m_{\Omega_j}^*(n) = \mathrm{char}(n) \circ m = \mathrm{char}(m^{-1}(n))$. Hence, we have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \arrow[r, "m_{\Omega_j}^*"] \arrow[d, equal, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_j) \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E) \arrow[r, "m^{-1}"'] & \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(A).
\end{tikzcd}$$

By Lemma 3.2.2, the inverse image functor $m^{-1} : \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E) \to \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(A)$ is bijective. Therefore, the mapping $m_{\Omega_j}^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_j)$ is also bijective, i.e., Ω_j is a sheaf for j.

Finally, we shall prove that $\mathrm{true}_j : 1 \rightarrowtail \Omega_j$ is a subobject classifier for $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. We have already seen in Lemma 3.2.2 that $\mathrm{true}_j : 1 \rightarrowtail \Omega_j$ classifies $\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$ for each object E in $\mathcal{E}$. Moreover, by Lemma 3.2.4, for all $F \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$, we have $\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(F) \cong \mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(F)$. This implies that $\mathrm{true}_j : 1 \rightarrowtail \Omega_j$ is a subobject classifier for $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. The proof of Theorem 3.2.1 is complete.

3.3 The Associated Sheaf Functor

The aim of this section is to prove the following theorem:

Theorem 3.3.1. *Let $\mathcal{E}$ be a topos, j a Lawvere-Tierney topology on $\mathcal{E}$. Then the inclusion functor $i : \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$ has a left exact left adjoint $\mathbf{a} : \mathcal{E} \to \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$.* □

Lemma 3.3.1. *Let $m : B \rightarrowtail C$ be a monomorphism in $\mathcal{E}$. If C is separated for j, then so is B.* □

Proof. Let $d : D \rightarrowtail E$ be a dense monomorphism and $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, B)$ such that $d_B^*(f) = d_B^*(g)$, i.e., $fg = gd$. Then we have $mfd = mgd \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, C)$, i.e, $d_C^*(mf) = d_C^*(mg)$. Since C is separated for j, d_C^* is injective. Hence, we have $mf = mg$. Since m is monomorphism, we obtain $f = g$. This implies that d_B^* is injective. Therefore, B is separated for j. The proof is complete. ■

Lemma 3.3.2. *Let C be an object in $\mathcal{E}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *C is separated for j;*

(ii) *the diagonal morphism $\Delta_C : C \rightarrowtail C \times C$ for C is a closed subobject of $C \times C$;*

(iii) *$j^C \circ \{*\}_C = \{*\}_C$ holds:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\{*\}_C"] \arrow[dr, "\{*\}_C"'] & \Omega^C \arrow[d, "j^C"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \Omega^C; \end{tikzcd}$$

(iv) *for any morphism $f : A \to C$ in $\mathcal{E}$, the product $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle : A \rightarrowtail A \times C$ is a closed subobject of $A \times C$.* □

Proof. ((i) ⇒ (ii)) Suppose that C is separated for j. We shall prove that $C \le \overline{C}$ and $\overline{C} \le C$ hold. Consider the canonical dense monomorphism $d_{\Delta_C} : C \rightarrowtail \overline{C}$ for Δ_C, i.e., d_{Δ_C} is the dense monomorphism such that $\overline{\Delta_C} d_{\Delta_C} = \Delta_C$. Hence, $C \le \overline{C}$ holds in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(C \times C)$. To prove that $\overline{C} \le C$ holds, let π_1 and π_2 be projections from $C \times C$ to C. By the definition of the diagonal morphism, we have $\pi_i \overline{\Delta_C} d_{\Delta_C} = \pi_i \Delta_C = \mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C, C)$ $(i = 1, 2)$. Therefore, we have $(d_{\Delta_C})^*_C(\pi_1 \overline{\Delta_C}) = (d_{\Delta_C})^*_C(\pi_2 \overline{\Delta_C})$. Since C is separated, the mapping

$$(d_{\Delta_C})^*_C : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\overline{C}, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C, C)$$

is injective. Hence, we have $\pi_1 \overline{\Delta_C} = \pi_2 \overline{\Delta_C}$, i.e., $\overline{\Delta_C}$ equalizes π_1 and π_2. On the other hand, Δ_C is an equalizer of π_1 and π_2 [*4]. Therefore, there exists a morphism $l : \overline{C} \to C$ such that $\Delta_C l = \overline{\Delta_C}$, i.e., $\overline{C} \le C$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(C \times C)$. Thus, we have $C \cong \overline{C}$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(C \times C)$.

((ii) ⇔ (iii)) Recall that the diagonal morphism $\Delta_C : C \rightarrowtail C \times C$ is a closed subobject of $C \times C$ iff $j \circ \delta_C = \delta_C$, where $\delta_C = \mathrm{char}(\Delta_C)$ is the Kronecker delta of C as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "!^C"] \arrow[d, tail, "\Delta_C"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ C \times C \arrow[r, "\delta_C"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Recall also that the singleton morphism $\{*\}_C : C \to \Omega^C$ is the exponential transpose of δ_C (see Definition 3.0.2). Then it holds that $j \circ \delta_C = \delta_C$ iff $j^C \circ \{*\}_C = \{*\}_C$, since we have the following natural bijection:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C \times C, \Omega) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C, \Omega^C)$$
$$j \circ \delta_C \mapsto j^C \circ \{*\}_C.$$

[*4] Recall that the diagonal morphism $\Delta_C : C \rightarrowtail C \times C$ is a morphism such that $\pi_1 \Delta_C = \pi_2 \Delta_2 = \mathrm{id}_C$. Suppose that there exists a morphism $h : D \to C \times C$ such that h equalizes π_1 and π_2, i.e., $\pi_1 h = \pi_2 h$. If there were to exist a morphism $k : D \to C$ such that $h = \Delta_C k$, then we have $\pi_i h = \pi_i \Delta_C k = k$ $(i = 1, 2)$. Thus, $k = \pi_i h (i = 1, 2)$ is the unique morphism such that $h = \Delta_C k$.

((ii) $\Rightarrow$ (iv)) Let $f : A \to C$ be a morphism in $\mathcal{E}$. Note that the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_A, f\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C \arrow[d, tail, "\Delta_C"] \\ A \times C \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_C"'] & C \times C. \end{tikzcd}$$

This implies that $\mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle) = \mathrm{char}(\Delta_C) \circ (f \times \mathrm{id}_C)$ holds. Suppose that the diagonal morphism Δ_C is a closed subobject of $C \times C$, i.e., $j \circ \mathrm{char}(\Delta_C) = \mathrm{char}(\Delta_C)$. Then we have

$$\begin{aligned} \mathrm{char}(\overline{\langle \mathrm{id}_A, f\rangle}) &= j \circ \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle) \\ &= j \circ \mathrm{char}(\Delta_C) \circ (f \times \mathrm{id}_C) \\ &= \mathrm{char}(\Delta_C) \circ (f \times \mathrm{id}_C) \quad (\because \Delta_C \in \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(C \times C)) \\ &= \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle). \end{aligned}$$

Therefore, $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle : A \rightarrowtail A \times C$ is a closed subobject of $A \times C$.

((iv) $\Rightarrow$ (i)) Let $m : A \rightarrowtail B$ be a dense monomorphism. To prove that C is separated for j, let $f, g : B \to C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, C)$ be two morphism such that $fm = gm$, i.e., $m_C^*(f) = m_C^*(g)$. Note that the following diagram is a pullback square:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_A, fm\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_B, f\rangle"] \\ A \times C \arrow[r, tail, "m \times \mathrm{id}_C"'] & B \times C. \end{tikzcd}$$

Recall that the infimum $(m \times \mathrm{id}_C) \wedge \langle \mathrm{id}_B, f\rangle : A \rightarrowtail B \times C$ of two subobjects $m \times \mathrm{id}_C : A \times C \rightarrowtail B \times C$ and $\langle \mathrm{id}_B, f\rangle : B \rightarrowtail B \times C$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(B \times C)$ is given by the above pullback square. Hence, we have

$$\mathrm{char}((m \times \mathrm{id}_C) \circ \langle \mathrm{id}_A, fm\rangle) = \mathrm{char}((m \times \mathrm{id}_C)) \wedge \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle).$$

Since m is dense, $m \times \mathrm{id}_C$ is also dense (see the proof of Lemma 3.2.1). Therefore, we have

$$\begin{aligned} &\mathrm{char}(\overline{(m \times \mathrm{id}_C) \circ \langle \mathrm{id}_A, fm\rangle}) \\ &= j \circ \mathrm{char}((m \times \mathrm{id}_C) \wedge \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle)) \\ &= j \circ \wedge \circ \langle \mathrm{char}((m \times \mathrm{id}_C)), \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle)\rangle \\ &= \wedge \circ (j \times j) \circ \langle \mathrm{char}((m \times \mathrm{id}_C)), \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle)\rangle \quad (\text{by } j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)) \\ &= \wedge \circ \langle \mathrm{char}(\overline{(m \times \mathrm{id}_C)}), \mathrm{char}(\overline{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle})\rangle \\ &= \mathrm{char}(\overline{(m \times \mathrm{id}_C)}) \wedge \mathrm{char}(\overline{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle}) \\ &= \mathrm{char}(\mathrm{id}_{B \times C} \wedge \overline{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle}) \quad (\because m \times \mathrm{id}_C \text{ is dense}) \\ &= \mathrm{char}(\mathrm{id}_{B \times C} \wedge \langle \mathrm{id}_B, f\rangle) \quad (\because \langle \mathrm{id}_B, f\rangle \text{ is closed, by assumption}) \\ &= \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle). \end{aligned}$$

Since $fm = gm$ and $\langle \mathrm{id}_B, g\rangle$ is closed, we also have $\mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, f\rangle) = \mathrm{char}(\langle \mathrm{id}_B, g\rangle)$, by the similar argument. This implies that there exists an isomorphism $t : B \to B$ such that $\langle \mathrm{id}_B, f\rangle = \langle \mathrm{id}_B, g\rangle t$. i.e., $t = \mathrm{id}_B$ and $f = gt$. Hence, we have $f = g$. Therefore, m_C^* is injective. Thus, C is separated.

The proof is complete. ■

Lemma 3.3.3. *Let E be an object in $\mathcal{E}$. Then E is separated for j iff there exists a sheaf I_E for j with a monomorphism $m_E : E \rightarrowtail I_E$.* □

Proof. We shall prove that we can take the exponentiation Ω^E of Ω by E as the required sheaf I_E. Recall that for the equalizer $e_j : \Omega_j \to \Omega$ of j and id_Ω, there exists the retraction $r : \Omega \to \Omega_j$ of e_j, i.e., $re_j = \mathrm{id}_\Omega$. We shall write $(-)^E$ for the exponentiation by E, i.e., $E \times - \dashv (-)^E$. Consider the composite $r^E \circ \{*\}_E$, where $\{*\}_E : E \to \Omega^E$ is the singleton morphism and $r^E = (-)^E(r)$. Consider the image $m_E : E' \rightarrowtail \Omega_j^E$ of $r^E \circ \{*\}_E$ with an epimorphism $\theta_E : E \twoheadrightarrow E'$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\{*\}_E"] \arrow[dr, "\theta_E"'] & \Omega^E \arrow[r, "r^E"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega_j^E \\ & E'. \arrow[ur, "m_E"'] & \end{tikzcd}$$

By Lemma 3.2.1, $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ is closed under exponentiation. Hence, $\Omega_j^E \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. In particular, $\Omega_j^E \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$. By Lemma 3.3.1, the domain E' of the monomorphism m_E with separated codomain Ω_j^E is also separated, i.e., $E' \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$.

Suppose that $E \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$. By exponentiating the image factorization $j = e_j r$, we have $j^E = e_j^E \circ r^E$. By Lemma 3.3.2, we have $j^E \circ \{*\}_E = \{*\}_E$. Hence, we have $e_j^E \circ r^E \circ \{*\}_E = \{*\}_E$. Since $\{*\}_E$ is a monomorphism, $r^E \circ \{*\}_E$ is also a monomorphism. Therefore, $r^E \circ \{*\}_E : E \rightarrowtail \Omega_j^E$ is the required monomorphism. Moreover, for the image factorization $m_E \circ \theta_E$ of $r^E \circ \{*\}_E$, θ_E is also a monomorphism. Thus, θ_E is a monomorphism and an epimorphism in the topos $\mathcal{E}$. Consequently, θ_E is an isomorphism, i.e., $E \cong E'$.

Conversely, suppose that there exists a sheaf I_E with a monomorphism $m_E : E \rightarrowtail I_E$. The sheaf I_E is, in particular, separated. By Lemma 3.3.2, E is also separated. The proof is complete. ■

Lemma 3.3.4. *Let E be an object in $\mathcal{E}$. Then there exists an epimorphism $\theta_E : E \twoheadrightarrow E'$ in $\mathcal{E}$ such that the kernel pair of θ_E is represented by the closure $\overline{\Delta_E} : \overline{E} \rightarrowtail E \times E$ of the diagonal morphism $\Delta_E : E \rightarrowtail E \times E$ for E.* □

Proof. As is the proof of Lemma 3.3.3, take the image $m_E : E' \rightarrowtail \Omega_j^E$ of $r^E \circ \{*\}_E$ with an epimorphism $\theta_E : E \twoheadrightarrow E'$, i.e., $r^E \circ \{*\}_E = m_E \circ \theta_E$. Note that the kernel pair of θ_E is the same as that of $r^E \circ \{*\}_E = m_E \circ \theta_E$. To verify this, consider the following two diagrams:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(I)}"] & E' \arrow[r, "m_E"] \arrow[d, tail, "\Delta_{E'}"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \Omega_j^E \arrow[d, tail, "\Delta_{\Omega_j^E}"] \\
E \times E \arrow[r, "\theta_E \times \theta_E"'] & E' \times E' \arrow[r, tail, "m_E \times m_E"'] & \Omega_j^E \times \Omega_j^E
\end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

and

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(II)}"] & \Omega_j^E \arrow[d, tail, "\Delta_{\Omega_j^E}"] \\
E \times E \arrow[r, "(r^E \circ \{*\}_E) \times (r^E \circ \{*\}_E)"'] & \Omega_j^E \times \Omega_j^E.
\end{tikzcd} \tag{3.3.2}$$

Since the right-hand side of the above rectangle in (3.3.1) is a pullback square, the left-hand side (I) of the rectangle is a pullback square iff (II) is a pullback square in the above diagram in (3.3.2), by the pasting lemma for pullback squares. Hereafter, we shall write s_E for $r^E \circ \{*\}_E$ for short.

Accordingly, we shall prove that $(s_E \times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E})$ is equivalent to $\overline{\Delta_E}$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E \times E)$. First, we claim that $(s_E \times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E}) \leq \overline{\Delta_E}$ holds. To prove this, it is sufficient to show that for any pair (f, g) of two morphisms $f, g : B \to E$ with $s_E f = s_E g$, there exists a morphism $k : B \to \overline{E}$ such that $\langle g, f \rangle = \overline{\Delta_E} \circ k$. To this end, let $f, g : B \to E$ be two morphisms such that $s_E f = s_E g$, i.e., $(r^E \circ \{*\}_E) \circ f = (r^E \circ \{*\}_E) \circ g$. Since $j^E = e_j^E \circ r^E$, by composing e_j^E, we have

$$j^E \circ \{*\}_E \circ f = j^E \circ \{*\}_E \circ g.$$

By taking the exponential transpose by E, we obtain

$$j \circ \delta_E \circ (\mathrm{id}_B \times f) = j \circ \delta_E \circ (\mathrm{id}_B \times g). \tag{3.3.3}$$

Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_B, f \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & E \arrow[r, "!^E"] \arrow[d, tail, "\Delta_E"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \arrow[dr, "\text{true}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"'] & \\
B \times E \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_E"'] & E \times E \arrow[r, "\delta_E"'] & \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

By the pasting lemma for pullback squares, the above rectangle is a pullback diagram. This implies that $\delta_E \circ (f \times \mathrm{id}_B)$ is the classifying morphism for $\langle \mathrm{id}_B, f \rangle$. By (3.3.3), we have

$$\mathrm{char}(\overline{\langle \mathrm{id}_B, f \rangle}) = j \circ \delta_E \circ (f \times \mathrm{id}_B) = j \circ \delta_E \circ (g \times \mathrm{id}_B) = \mathrm{char}(\overline{\langle \mathrm{id}_B, g \rangle}).$$

Hence, there exists an isomorphism h such that

$$\overline{\langle \mathrm{id}_B, f \rangle} = \overline{\langle \mathrm{id}_B, g \rangle} \circ h. \tag{3.3.4}$$

On the other hand, consider the canonical dense morphism $d_{\langle \mathrm{id}_B, f \rangle} : B \to \overline{B}$ for $\langle \mathrm{id}_B, f \rangle$. Then we have

$$\overline{\langle \mathrm{id}_B, f \rangle} \circ d_{\langle \mathrm{id}_B, f \rangle} = \langle \mathrm{id}_B, f \rangle. \tag{3.3.5}$$

By (3.3.4) and (3.3.5), we obtain

$$\langle \mathrm{id}_B, f\rangle = \overline{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle} \circ d_{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle} = \overline{\langle \mathrm{id}_B, g\rangle} \circ (h \circ d_{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle}).$$

Therefore, we have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h\circ d_{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle}"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}_B, f\rangle"'] & \overline{B} \arrow[rr, "(\overline{\Delta_E})^{-1}(g\times \mathrm{id}_B)"] \arrow[d, tail, "\overline{\langle \mathrm{id}_B, g\rangle}"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & & \overline{E} \arrow[d, tail, "\overline{\Delta_E}"] \\
& B\times E \arrow[rr, "g\times \mathrm{id}_E"'] & & E\times E.
\end{tikzcd}$$

Thus, we have

$$\langle g, f\rangle = (g\times \mathrm{id}_E)\langle \mathrm{id}_B, f\rangle = \overline{\Delta_E} \circ (\overline{\Delta_E})^{-1}(g\times \mathrm{id}_E) \circ (h\circ d_{\langle \mathrm{id}_B, f\rangle}).$$

Consequently, in particular, for the kernel pair $(s_E\times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E})$, we obtain $(s_E \times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E}) \leq \overline{\Delta_E}$.

Next, we shall prove the converse, i.e., $\overline{\Delta_E} \leq (s_E\times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E})$ holds. To this end, it is sufficient to prove that s_E coequalizes $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, i.e., the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
\overline{E} \arrow[r, "\pi_2\overline{\Delta_E}"] \arrow[d, "\pi_1\overline{\Delta_E}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "s_E"] \\
E \arrow[r, "s_E"'] & \Omega_j^E,
\end{tikzcd}$$

where $\pi_i : E\times E \to E$ $(i=1,2)$ are the projections from $E\times E$ to E. Indeed, if s_E coequalizes $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, then we have

$$(s_E\times s_E)\overline{\Delta_E} = (s_E\times s_E)\langle \pi_1\overline{\Delta_E}, \pi_2\overline{\Delta_E}\rangle = \langle s_E\pi_1\overline{\Delta_E}, s_E\pi_2\overline{\Delta_E}\rangle = \Delta_{\Omega_j^E} s_E\pi_i\overline{\Delta_E} (i=1,2).$$

Hence, by the universal mapping property of the pullback, there exists a morphism $l : \overline{E} \to (s_E\times s_E)^{-1}(\Omega_j^E)$ such that $(s_E\times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E})l = \overline{\Delta_E}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
\overline{E} \arrow[drr, bend left, "s_E\pi_1\overline{\Delta_E}=s_E\pi_2\overline{\Delta_E}"] \arrow[dr, dotted, "\exists! l"] \arrow[ddr, tail, bend right, "\overline{\Delta_E}=\langle \pi_1\overline{\Delta_E}, \pi_2\overline{\Delta_E}\rangle"'] & & \\
& (s_E\times s_E)^{-1}(\Omega_j^E) \arrow[r] \arrow[d, tail, "(s_E\times s_E)^{-1}(\Delta_{\Omega_j^E})"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \Omega_j^E \arrow[d, tail, "\Delta_{\Omega_j^E}"] \\
& E\times E \arrow[r, "s_E\times s_E"'] & \Omega_j^E\times\Omega_j^E.
\end{tikzcd}$$

To prove that s_E coequalizes $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, consider the canonical dense monomorphism $d_{\Delta_E} : E \to \overline{E}$ for Δ_E, i.e., $\overline{\Delta_E}d_{\Delta_E} = \Delta_E$. Then we have

$$(d_{\Delta_E})^*_{\Omega_j^E}(s_E\pi_i\overline{\Delta_E}) = s_E\pi_i\overline{\Delta_E}d_{\Delta_E} = s_E\pi_i\Delta_E = s_E \quad (i=1,2).$$

Since Ω_j^E is a sheaf for j, $(d_{\Delta_E})^*_{\Omega_j^E}$ is bijective. Therefore, we obtain $s_E\pi_1\overline{\Delta_E} = s_E\pi_2\overline{\Delta_E}$, i.e., s_E coequalizes π_1 and π_2. The proof is complete. ■

In the above proof, we have seen that the kernel pair of θ_E is represented by the product $\langle \pi_1\overline{\Delta_E}, \pi_2\overline{\Delta_E}\rangle$. Recall that an epimorphism in a topos is the coequalizer of its kernel pair (see Fact 3.0.8). Therefore, θ_E is the coequalizer of $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, i.e., the following diagram is an coequalizer diagram:

$$\begin{tikzcd} \overline{E} \arrow[r, shift left, "\pi_1\overline{\Delta_E}"] \arrow[r, shift right, "\pi_2\overline{\Delta_E}"'] & E \arrow[r, two heads, "\theta_E"] & E'. \end{tikzcd}$$

Lemma 3.3.5. *Let E be an object in $\mathcal{E}$. If there exists an epimorphism θ_E from E to a separated object E' such that the kernel pair of θ_E is represented by the closure $\overline{\Delta_E}$ of the diagonal morphism $\Delta_E : E \rightarrowtail E \times E$, then θ_E is universal for morphisms from E to separated objects, i.e., for any separated object S and any morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, S)$, there exists a unique morphism g such that $g\theta_E = f$ as in the following diagram:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[dr, "f"'] & E' \arrow[d, dotted, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & S. \end{tikzcd}$$

Proof. Let $S \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, S)$ and $\theta_E : E \twoheadrightarrow E'$ an epimorphism with $E' \in \mathrm{Sep}_E\mathcal{E}$ such that the kernel pair of θ_E is represented by the product $\langle \pi_1\overline{\Delta_E}, \pi_2\overline{\Delta_E}\rangle$. Then the epimorphism θ_E is the coequalizer of $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, by Fact 3.0.8. It is sufficient to prove that f coequalizes $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$. To this end, consider the canonical dense monomorphism $d_{\Delta_E} : E \rightarrowtail \overline{E}$ for Δ_E, i.e., $\overline{\Delta_E}d_{\Delta_E} = \Delta_E$. Then we have

$$(d_{\Delta_E})^*_S(f\pi_i\overline{\Delta_E}) = f\pi_i\overline{\Delta_E}d_{\Delta_E} = f\pi_i\Delta_E = f \quad (i = 1, 2).$$

Hence, we have $(d_{\Delta_E})^*_S(f\pi_1\overline{\Delta_E}) = (d_{\Delta_E})^*_S(f\pi_2\overline{\Delta_E})$. Since S is separated, $(d_{\Delta_E})^*_S$ is injective. Therefore, we have $f\pi_1\overline{\Delta_E} = f\pi_2\overline{\Delta_E}$, i.e., f coequalizes $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$. Since θ_E is the coequalizer of $\pi_1\overline{\Delta_E}$ and $\pi_2\overline{\Delta_E}$, there exists a unique morphism $g : E' \to S$ such that $g\theta_E = f$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \overline{E} \arrow[r, shift left, "\pi_1\overline{\Delta_E}"] \arrow[r, shift right, "\pi_2\overline{\Delta_E}"'] & E \arrow[r, two heads, "\theta_E"] \arrow[dr, "f"'] & E' \arrow[d, dotted, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & & S. \end{tikzcd}$$

The proof is complete. ■

Lemma 3.3.6. *The inclusion functor $i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sep}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$ has a left adjoint ι.* □

Proof. Let $E \in \mathcal{E}$, $S \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ and $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, S)$. By Lemma 3.3.4, there exists an epimorphism $\theta_E : E \to E'$ such that the kernel pair is the closure $\overline{\Delta_E}$ of the diagonal morphism Δ_E for E (recall that, in the proof of Lemma 3.3.3 and Lemma 3.3.4, we have constructed θ_E by the image factorization of $r^E \circ \{*\}_E$). By Lemma 3.3.5, θ_E is universal for morphisms from E to separated objects.

Accordingly, we define a mapping $\iota : \mathcal{E} \to \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ by

$$\iota(E) := E'(= \text{the image of } r^E \circ \{*\}_E) \quad (E \in \mathcal{E}).$$

Next, we shall define actions of ι for a morphism $f : E \to F$ in $\mathcal{E}$. As we have seen in the above, there exists a unique morphism $\iota(f) : \iota(E) \to \iota(F)$ such that $\iota(f) \circ \theta_E = \theta_F \circ f$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta_E"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \iota(E) \arrow[d, dotted, "\iota(f)"] \\ F \arrow[r, "\theta_F"'] & \iota(F). \end{tikzcd}$$

Then $\iota : \mathcal{E} \to \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ is a functor. This implies that $\theta = (\theta_E)_{E\in\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$ is a natural transformation from $\mathrm{id}_\mathcal{E}$ to $i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \circ \iota$. As we have seen in the beginning of the proof, for each $E \in \mathcal{E}$, θ_E has the universal mapping property. Consequently, θ is the unit of the adjoint $\iota \dashv i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$. The proof is complete. ■

Lemma 3.3.7. *Let E be a separated object for j in $\mathcal{E}$, I a sheaf for j and $m : E \rightarrowtail I$ a monomorphism in $\mathcal{E}$. Then the canonical dense monomorphism $d_m : E \rightarrowtail \overline{E}$ for m is universal for morphisms from E to sheaves for j.* □

Proof. Let $E \in \mathrm{Sep}_j$ and $I, F \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. Let $m : E \rightarrowtail I$ be a monomorphism and $\sigma \in \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(E, F)$. Consider the canonical dense monomorphism $d_m : E \to \overline{E}$ for m. By Lemma 3.2.4, $\overline{E}$ is a sheaf for j, since $\overline{E}$ is closed. Since F is a sheaf for j, the mapping

$$(d_m)^*_F : \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(\overline{E}, F) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(E, F)$$

is bijective. Hence, for the given $\sigma \in \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(E, F)$, there exists a unique morphism $\tau \in \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(\overline{E}, F)$ such that $\tau \circ d_m = \sigma$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "d_m"] \arrow[dr, "\sigma"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \overline{E} \arrow[d, dotted, "\tau"] \\ & F. \end{tikzcd}$$

The proof is complete. ■

Lemma 3.3.8. *The inclusion functor $i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ has a left adjoint.* □

Proof. By Lemma 3.3.3, for each $E \in \mathrm{Sep}_\mathcal{E}$, there exists a sheaf I_E for j with a monomorphism $m_E : E \rightarrowtail I_E$. In fact, we can choose $m_E = r^E \circ \{*\}_E : E \rightarrowtail \Omega_j^E$ (see the proof of Lemma 3.3.3). By Lemma 3.3.7, the canonical dense monomorphism d_{m_E} for m_E is universal for morphisms from E to sheaves for j.

Accordingly, we define a mapping $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sep}_j\mathcal{E} \to \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ by setting

$$\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}(E) := \overline{E} \quad (E \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}), \tag{3.3.6}$$

where $\overline{E}$ is the closure for $m_E : E \rightarrowtail I_E$. Next, we shall define an action of $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$ for a morphism $f : E \to F$ in $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$. Let $d_{m_E} : E \rightarrowtail \overline{E}$ and $d_{m_F} : F \rightarrowtail \overline{F}$ be two canonical dense monomorphisms for $m_E : E \rightarrowtail I_E$ and $m_F : F \rightarrowtail I_F$, respectively. By the universal mapping property of d_{m_E}, there exists a unique morphism $\overline{f} : \overline{E} \to \overline{F}$ such that $\overline{f} d_{m_E} = d_{m_F} f$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "d_{m_E}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \overline{E} \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\ F \arrow[r, tail, "d_{m_F}"'] & \overline{F}. \end{tikzcd}$$

Now, we define $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}(f)$ for each $f : E \to F$ in $\mathrm{Sep}_{\mathcal{E}}$ by,

$$\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}(f) := \overline{f}. \tag{3.3.7}$$

Then $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} : \mathrm{Sep}_j\mathcal{E} \to \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ is a functor.

Finally, we define a family of morphisms $\nu = (\nu_E)_{E \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$ for each object E in $\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$ by

$$\nu_E := d_{m_E} : E \rightarrowtail \overline{E} \quad \text{(canonical dense monomorphism for } m_E). \tag{3.3.8}$$

Then ν is the natural transformation from $\mathrm{id}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$ to $i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}} \circ \overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$, by the definition of $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$. As we have seen in the beginning of the proof, for each $E \in \mathrm{Sep}_j\mathcal{E}$, ν_E has the universal mapping property. Consequently, ν is the unit of the adjoint $\overline{(\,\cdot\,)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \dashv i_{\mathrm{Sh}_{\mathcal{E}}}$. The proof is compete. ■

Now, we shall prove Theorem 3.3.1. We have two adjoints $\iota \dashv i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$ and $\overline{(-)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \dashv i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \arrow[r, hook, shift right, "i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sep}_j\mathcal{E} \arrow[l, shift right, "\overline{(-)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}"'] \arrow[r, hook, shift right, "i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{E}. \arrow[l, shift right, "\iota"'] \end{tikzcd} \tag{3.3.9}$$

Note that the inclusion functor $i : \mathrm{Sh}_j\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$ is just the composite $i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \circ i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}$ of $i_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}$ and $i_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}}$. Therefore, the left adjoint of the inclusion functor i is given by the composite $\overline{(-)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \circ \iota$, i.e., $\overline{(-)}_{\mathrm{Sep}_j\mathcal{E}} \circ \iota \dashv i$. We shall denote this left adjoint by $\mathbf{a}$. The left adjoint $\mathbf{a}$ is called the *associated sheaf functor* or the *sheafification functor*. For an object E in $\mathcal{E}$, the sheaf $\mathbf{a}(E)$ for j is called the *sheaf associated* to E, or the *sheafification* of E.

We shall describe the sheaf $\mathbf{a}(E)$ associated to E for each $E \in \mathcal{E}$ more explicitly as follows. First, consider the composite $r^E \circ \{*\}_E : E \to \Omega_j^E$ of $\{*\}_E$ and r^E, and take the image factorization of $r^E \circ \{*\}_E$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "r^E \circ \{*\}_E"] \arrow[dr, two heads, "\theta_E"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & & \Omega_j^E \\ & \iota(E). \arrow[ur, tail, "m_E"'] & \end{tikzcd}$$

Then, from the proof of Lemma 3.3.4, $\theta_E : E \twoheadrightarrow \iota(E)$ is an epimorphism with the kernel pair $\overline{\Delta_E}$. Hence, by Lemma 3.3.5, θ_E is universal for morphisms from E to separated objects. Since $m_E : \iota(E) \rightarrowtail \Omega_j^E$ is a monomorphism to a sheaf Ω_j^E for j, by Lemma 3.3.7, the canonical dense monomorphism d_{m_E} for m_E is universal for morphisms from $\iota(E)$ to sheaves for j. We shall denote d_{m_E} by μ_E. Then the composite $\eta_E := \mu_E \circ \theta_E : E \twoheadrightarrow \iota(E) \rightarrowtail \overline{\iota(E)}$ is universal from E to sheaves for j. Thus, $\eta = (\eta_E)_{E \in \mathcal{E}}$ is the unit of the adjoint $\mathbf{a} \dashv i$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "r^E \circ \{*\}_E"] \arrow[d, two heads, "\theta_E"'] \arrow[drr, "\eta_E"] & & \Omega_j^E \\ \iota(E) \arrow[rr, tail, "\mu_E = d_{m_E}"'] & & \overline{\iota(E)} = \mathbf{a}(E). \arrow[u, tail, "\overline{m_E}"'] \end{tikzcd}$$

To complete the proof of Theorem 3.3.1, we shall prove that $\mathbf{a}$ is left exact, i.e., $\mathbf{a}$ preserves finite limits.

Lemma 3.3.9. *The associated sheaf functor* $\mathbf{a} : \mathcal{E} \to \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ *preserves finite limits.* □

Proof. To show that $\mathbf{a}$ preserves finite limits, it is sufficient to prove that $\mathbf{a}$ preserves binary products and equalizers.

(binary products) Let $E, F \in \mathcal{E}$. It is sufficient to prove that $\eta_E \times \eta_F : E \times F \to \mathbf{a}(E) \times \mathbf{a}(F)$ is universal for morphisms from $E \times F$ to sheaves for j, i.e., for any $G \in \mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ and any $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E \times F, G)$, there exists a unique morphism $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E) \times \mathbf{a}(F), G)$ such that $\rho \circ (\eta_E \times \eta_F) = \sigma$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\eta_E \times \eta_F"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathbf{a}(E) \times \mathbf{a}(F) \arrow[d, dotted, "\rho"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

To this end, let $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E \times F, G)$. Consider the exponential transpose $\hat{\sigma} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F, G^E)$ of σ by E, i.e., $\sigma = \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \hat{\sigma})$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "\mathrm{id}_E \times \hat{\sigma}"'] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"', near start] & \\ E \times G^E \arrow[r, "\mathrm{ev}_E"'] & G, \end{tikzcd}$$

where ev_E is the evaluation morphism for the adjoint $E \times - \dashv (-)^E$. By Lemma 3.2.1, F^E is a sheaf for j. By the universal mapping property of η_F, there exists a unique morphism $\hat{\tau} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{a}(F), G^E)$ such that $\hat{\tau} \circ \eta_F = \hat{\sigma}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta_F"] \arrow[dr, "\hat{\sigma}"'] & \mathbf{a}(F) \arrow[d, dotted, "\exists! \hat{\tau}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & G^E. \end{tikzcd}$$

Take the exponential transpose $\check{\tau} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E \times \mathbf{a}(F), G)$ of τ by E, i.e., $\check{\tau} = \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \hat{\tau})$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \times \mathbf{a}(F) \arrow[d, "\mathrm{id}_E \times \hat{\tau}"'] \arrow[dr, "\check{\tau}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ E \times G^E \arrow[r, "\mathrm{ev}_E"'] & G. \end{tikzcd}$$

Take the exponential transpose $\tilde{\tau} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, G^{\mathbf{a}(F)})$ of $\check{\tau}$ by $\mathbf{a}(F)$, i.e., $\check{\tau} = \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)})$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \times \mathbf{a}(F) \arrow[d, "\tilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}"'] \arrow[dr, "\check{\tau}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ G^{\mathbf{a}(F)} \times \mathbf{a}(F) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)}"'] & G, \end{tikzcd}$$

where $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)}$ is the evaluation morphism for the adjoint $-\times \mathbf{a}(F) \dashv (-)^{\mathbf{a}(F)}$. By Lemma 3.2.1, $F^{\mathbf{a}(F)}$ is a sheaf for j. By the universal mapping property of η_E, there exists a unique morphism $\tilde{\rho} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E), G^{\mathbf{a}(F)})$ such that $\tilde{\rho} \circ \eta_E = \tilde{\tau}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta_E"] \arrow[dr, "\tilde{\tau}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{a}(E) \arrow[d, dotted, "\tilde{\rho}"] \\ & G^{\mathbf{a}(F)}. \end{tikzcd}$$

Finally, take the exponential transpose $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E) \times \mathbf{a}(F), G)$ of $\check{\rho}$ by $\mathbf{a}(F)$, i.e., $\rho = \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\rho} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)})$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{a}(E) \times \mathbf{a}(F) \arrow[d, "\tilde{\rho} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}"'] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ G^{\mathbf{a}(F)} \times \mathbf{a}(F) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)}"'] & G. \end{tikzcd}$$

Then ρ is the unique morphism such that $\rho \circ (\eta_E \times \eta_F) = \sigma$. Indeed, from the above, we obtain

$$\begin{aligned}
&\rho \circ (\eta_E \times \eta_F) \\
&= \rho \circ (\eta_E \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) \\
&= \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\rho} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \circ (\eta_E \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) (\because \rho = \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\rho} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)})) \\
&= \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\rho} \circ \eta_E \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) \\
&= \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) \quad (\because \tilde{\rho} \circ \eta_E = \tilde{\tau}) \\
&= \check{\tau} \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) \quad (\because \check{\tau} = \mathrm{ev}_{\mathbf{a}(F)} \circ (\tilde{\tau} \times \mathrm{id}_{\mathbf{a}(F)}) \\
&= \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \check{\tau}) \circ (\mathrm{id}_E \times \eta_F) \quad (\because \check{\tau} = \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \hat{\tau})) \\
&= \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \hat{\tau} \circ \eta_F) \\
&= \mathrm{ev}_E \circ (\mathrm{id}_E \times \hat{\sigma}) \quad (\because \hat{\tau} \circ \eta_E = \hat{\sigma}) \\
&= \sigma.
\end{aligned}$$

The uniqueness follows from the construction of ρ.

(equalizers) [*5] Let $e : A \rightarrowtail B$ be an equalizer of $f, g : B \to C$ in $\mathcal{E}$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "e"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C. \end{tikzcd}$$

Consider the equalizer $d : E \rightarrowtail \mathbf{a}(B)$ of $\mathbf{a}(f)$ and $\mathbf{a}(g)$. Since $\mathbf{a}$ is a functor, $\mathbf{a}(e)$ equalizes $\mathbf{a}(f)$ and $\mathbf{a}(g)$. Hence, there exists a unique morphism $k : \mathbf{a}(A) \to E$ such that $dk = \mathbf{a}(e)$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "d"] & \mathbf{a}(B) \arrow[r, shift left, "\mathbf{a}(f)"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{a}(g)"'] & \mathbf{a}(C) \\ \mathbf{a}(A). \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "\mathbf{a}(e)"'] \arrow[u, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & & \end{tikzcd}$$

To show that $\mathbf{a}$ preserves equalizers, it is sufficient to prove that $k : \mathbf{a}(A) \to E$ is an isomorphism. Since $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$ is closed under limits, by Lemma 3.2.1, E is a sheaf for j. Hence, it is sufficient to prove that k is a dense monomorphism. Indeed, if k were to be a dense monomorphism, then k is closed, i.e., $\overline{\mathbf{a}(A)} \cong \mathbf{a}(A)$, by Lemma 3.2.4, and $\overline{\mathbf{a}(A)} \cong E$. Therefore, we obtain $\mathbf{a}(A) \cong \overline{\mathbf{a}(A)} \cong E$.

First, we shall prove that k is a monomorphism. To this end, let $u, v : X \to \mathbf{a}(A)$ be two morphism in $\mathcal{E}$ with $ku = kv$. Consider the following pullback square:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "{\langle p,q \rangle}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "{\langle u,v \rangle}"] \\ A \times A \arrow[r, "\eta_A \times \eta_A"'] & \mathbf{a}(A) \times \mathbf{a}(A). \end{tikzcd} \tag{3.3.10}$$

Then we have

$$\eta_B ep = \mathbf{a}(e)\eta_A p = kdur = dkvr = \mathbf{a}(e)vr = \mathbf{a}(e)\eta_A q = \eta_B eq.$$

Recall that $\eta_B = \mu_B \circ \theta_B$ and μ_B is a monomorphism. Hence, we have $\theta_B ep = \theta_B eq$. Recall that the kernel pair of θ_B is the closure $\overline{\Delta_B} : \overline{B} \to B \times B$ of the diagonal morphism $\Delta_B : B \to B \times B$. Therefore, there exists a unique morphism $l : P \to \overline{B}$ such that $\overline{\Delta_B} l = \langle ep, eq \rangle$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\exists ! l"] \arrow[drr, bend left, "eq"] \arrow[ddr, bend right, "ep"'] & & \\ & \overline{B} \arrow[r, "\pi_2 \overline{\Delta_B}"] \arrow[d, "\pi_1 \overline{\Delta_B}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "\theta_B"] \\ & B \arrow[r, "\theta_B"'] & \iota(B), \end{tikzcd}$$

where $\pi_i : B \times B \to B$ $(i = 1, 2)$ are the projections and $\iota(B)$ is the image of $r^B \circ \{*\}_B$. Consider the pullback of the canonical dense monomorphism d_{Δ_B}

[*5] This proof is given in [3, Lemma 4.4.6].

for Δ_B along l as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} l^{-1}(B) \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "l^{-1}(d_{\Delta_B})"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "d_{\Delta_B}"] \\ P \arrow[r, "l"'] & \overline{B}. \end{tikzcd}$$

Put $m := l^{-1}(d_{\Delta_B})$ for short. Then m equalizes ep and eq. Indeed, since $\overline{\Delta_B} l = \langle ep, eq \rangle$, we have

$$\begin{aligned} epm &= \pi_1 \overline{\Delta_B} lm = \pi_1 \overline{\Delta_B} d_{\Delta_B} h = \pi_1 \Delta_B h = h \\ &= \pi_2 \Delta_B h = \pi_2 \overline{\Delta_B} d_{\Delta_B} h = \pi_2 \overline{\Delta_B} lm = eqm. \end{aligned}$$

Since the equalizer e is a monomorphism, we obtain $pm = qm$. Hence, we have

$$m^*_{\mathbf{a}(A)}(\eta_A p) = \eta_A pm = \eta_A qm = m^*_{\mathbf{a}(A)}(\eta_A q).$$

Since the pullback of a dense morphism is also dense, $m : l^{-1}(B) \to P$ is dense. Since $\mathbf{a}(A)$ is a sheaf for j, the mapping $m^*_{\mathbf{a}(A)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P, \mathbf{a}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(l^{-1}(B), \mathbf{a}(A))$ is bijective. Hence, we have $\eta_A p = \eta_A q$. By the commutative diagram (3.3.10), we obtain $ut = vt$. Consider the image factorization $t = nw$ of t as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, two heads, "w"'] & \circlearrowleft & X \\ & N. \arrow[ur, tail, "n"'] & \end{tikzcd}$$

Then we have $unw = vnw$. Since w is an epimorphism, we obtain

$$un = vn. \tag{3.3.11}$$

Now, consider the image factorization $\eta_A = \theta_A \circ \mu_A$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\eta_A"] \arrow[dr, two heads, "\theta_A"'] & \circlearrowleft & \mathbf{a}(A) \\ & \iota(A). \arrow[ur, tail, "\mu_A"'] & \end{tikzcd}$$

Note that the product $\theta_A \times \theta_A$ of the epimorphism θ_A is an epimorphism, by Fact 3.0.12. Hence, we have the image factorization $\eta_A \times \eta_A = (\theta_A \times \theta_A) \circ (\mu_A \times \mu_A)$. Since the image is stable under pullback, by Fact 3.0.10, the pullback diagram (3.3.10) is written as follows:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "w"] \arrow[d, "\langle p,q \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & N \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, dotted, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "\langle u,v \rangle"] \\ A \times A \arrow[r, two heads, "\theta_A \times \theta_A"'] & \iota(A) \times \iota(A) \arrow[r, tail, "\mu_A \times \mu_A"'] & \mathbf{a}(A) \times \mathbf{a}(A). \end{tikzcd}$$

Since μ_E is dense, so is the product $\mu_E \times \mu_E$, by Fact 3.1.4. By Fact 3.1.3, the pullback n of the dense monomorphism $\mu_A \times \mu_A$ is also dense. Now, recall the equation (3.3.11) and consider

$$n^*_{\mathbf{a}(A)}(u) = un = vn = n^*_{\mathbf{a}(A)}(v) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P, \mathbf{a}(A)).$$

Since $\mathbf{a}(A)$ is separated, $n^*_{\mathbf{a}(A)}$ is injective. Hence, we obtain $u = v$. Therefore, k is a monomorphism.

Next, we shall prove that $k : \mathbf{a}(A) \to E$ is dense. To this end, consider the following pullback square:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\
E \arrow[r, tail, "d"'] & \mathbf{a}(B).
\end{tikzcd}$$

Then, by the naturality of of η, we have

$$\eta_C fh = \mathbf{a}(f)\eta_B h = \mathbf{a}(f)dq = \mathbf{a}(g)dq = \mathbf{a}(g)\eta_B h = \eta_C gh.$$

As is the case for the above proof of the monicity of k, this implies that there exists a unique morphism $l : Q \to \overline{C}$ such that $\overline{\Delta_C} l = \langle fh, gh \rangle$. Consider the pullback of the canonical dense monomorphism d_{Δ_C} for Δ_C along l as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
l^{-1}(C) \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "l^{-1}(d_{\Delta_C})"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C \arrow[d, tail, "d_{\Delta_C}"] \\
P \arrow[r, "l"'] & \overline{C}.
\end{tikzcd}$$

Put $m := l^{-1}(d_{\Delta_C})$ for short. Then, as is the case for the above proof of the monicity of k, we have $fhm = ghm$, i.e., hm equalizes f and g. Since e is the equalizer of f and g, there exists a unique morphism $l' : l^{-1}(C) \to A$ such that $hm = el'$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "e"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
l^{-1}(C). \arrow[u, dotted, "l'"] \arrow[ur, "hm"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & &
\end{tikzcd}$$

On the other hand, note that m is dense, since m is the pullback of the dense monomorphism d_{Δ_C}. Since $\mathbf{a}(A)$ is a sheaf for j, $m^*_{\mathbf{a}(A)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Q, \mathbf{a}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(l^{-1}(C), \mathbf{a}(A))$ is surjective. Hence, for $\eta_A l' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(l^{-1}(C), \mathbf{a}(A))$, there exists a unique morphism $l \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Q, \mathbf{a}(A))$ such that $lm = \eta_A l'$. From the above, we have

$$dqm = \eta_B hm = \mathbf{a}(e)el' = \mathbf{a}(e)\eta_A l' = \mathbf{a}(e)lm = dklm.$$

Since d is a monomorphism, we obtain $qm = klm \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(l^{-1}(C), E)$. Consider $m^*_E(q) = m^*_E(kl) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Q, E)$. Since E is separated, m^*_E is injective. Hence, we have $q = kl$. Take the image $n : N \rightarrowtail E$ of q. Then there exists a morphism s such that $n = ks$, since n is the image of q. Hence, we have $n \leq k$ in $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$. On the other hand, since q is the pullback of η_B and $\eta_B = \mu_B \circ \theta_B$ is the image factorization with a dense monomorphism μ_E, the image n of q is dense. Therefore, we have $\overline{n} \cong \mathrm{id}_E$. Since the closure operator is order-preserving, we have $\overline{n} \leq \overline{k}$. Thus, we obtain $\overline{k} \cong \mathrm{id}_E$, i.e., k is dense.

The proof is complete. ■

With the above lemma, the proof of Theorem 3.3.1 is complete.

Corollary 3.3.1. *Let E be an object in $\mathcal{E}$. Then there exists a bijection between the class of all closed subobjects* $\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$ *of E in $\mathcal{E}$ and the class of all subobjects* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E))$ *of* $\mathbf{a}(E)$ *in* $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. □

Proof. Recall that there exists the truth value object Ω_j in $\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}$. Hence, we have the bijection: $\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E), \Omega_j)$. Since the associated sheaf functor $\mathbf{a}$ is the left adjoint of the inclusion functor i, we have the bijection: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E), \Omega_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j)$. By Lemma 3.2.2, Ω_j classifies $\mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$. Therefore, we have the bijection: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \cong \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E)$. From the above, we obtain

$$\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_j\mathcal{E}}(\mathbf{a}(E), \Omega_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega_j) \cong \mathrm{ClSub}_{\mathcal{E}}(E).$$

The proof is complete. ■

3.4 Lawvere-Tierney Subsumes Grothendieck

Let $\mathbf{C}$ be a small category. Recall that a Grothendieck topology J on $\mathbf{C}$ is a subobject of the truth value object Ω of the presheaf category $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Recall also that $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ is a topos.

Theorem 3.4.1 (Lawvere-Tierney subsumes Grothendieck). *Let $\mathbf{C}$ be a small category and* $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ *a subobject classifier for the presheaf category* $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. *If j is a Lawvere-Tierney topology on* $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, *then there exists a unique Grothendieck topology J on $\mathbf{C}$ making the following diagram a pullback square:*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "!^J"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ \Omega \arrow[r, "j"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{3.4.1}$$

Conversely, if J is a Grothendieck topology on $\mathbf{C}$, then there exists a unique Lawvere-Tierney topology $j : \Omega \to \Omega$ on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ *making the diagram* (3.4.1) *a pullback square.* □

Proof. Let j be a Lawvere-Tierney topology on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Define a subobject $J \rightarrowtail \Omega$ by the pullback square (3.4.1), i.e., for a sieve S on $C \in \mathbf{C}$, we set

$$S \in J(C) \overset{\mathrm{def}}{\iff} j_C(S) = t_C,$$

where t_C is the maximal sieve on C. We shall prove that J is a Grothendieck topology on $\mathbf{C}$.

($t_C \in J(C)$ for all $C \in \mathbf{C}$) Let $C \in \mathbf{C}$. Recall that $\mathrm{true}_C(*) = t_C$. Since a Lawvere-Tierney topology j satisfies the condition $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$, we have $j_C(t_C) = t_C$. Therefore, we obtain $t_C \in J(C)$.

(stability axiom) Recall that, by the definition of Ω, for any $f : D \to C$ in $\mathbf{C}$, we have $(\Omega f)(S) = f^*(S)$ for all $S \in \Omega C$. Since j is a natural transformation from Ω to Ω, for each $f : D \to C$ in $\mathbf{C}$, we have $j_D \circ \Omega f = \Omega f \circ j_C$ as in the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Omega C \arrow[r, "j_C"] \arrow[d, "\Omega f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega C \arrow[d, "\Omega f"] \\
\Omega D \arrow[r, "j_C"'] & \Omega D,
\end{tikzcd}$$

that is, we have $j_D(f^*(S)) = f^*(j_C(S))$ for all $S \in \Omega C$. In particular, for all $S \in J(C)$ and all $f : D \to C$ in $\mathbf{C}$, we obtain $j_D(f^*(S)) = f^*(j_C(S)) = f^*(t_C) = t_D$, i.e., $f^*(S) \in J(D)$.

(transitivity axiom) First, we claim that j is order-preserving, i.e., for two sieves S, T on C, if $S \subseteq T$, then $j_C(S) \subseteq j_C(T)$. Indeed, if $S \subseteq T$, then we have $j_C(S) = j_C(S \cap T) = j_C(S) \cap j_C(T) \subseteq j_C(T)$. To prove the transitivity of J, let $S \in J(C)$ and $R \in \Omega C$ such that for any $f : D \to C \in S$, $f^*(R) \in J(D)$ holds. Since $j \circ j = j$, it is sufficient to prove that $j_C(j_C(R)) = t_C$. Let $f : D \to C \in S$. Then we have $f^*(R) \in J(D)$, i.e., $j_D(f^*(R)) = t_D$, by assumption. By the naturality of j, we have $f^*(j_C(R)) = j_C(f^*(R)) = t_D$. Hence, in particular, we have $\mathrm{id}_D \in f^*(j_C(R))$. This implies that $f \in j_C(R)$ holds. Therefore, we have $S \subseteq j_C(R)$. Since j is order-preserving, we obtain $j_C(S) \subseteq j_C(j_C(R))$. On the other hand, since $S \in J(C)$, we have $j_C(S) = t_C$. Thus, we obtain $j_C(j_C(R)) = t_C$.

We shall prove the converse. Let J be a Grothendieck topology on $\mathbf{C}$. We have defined a Lawvere-Tierney topology j on $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ in Theorem 3.1.1 as follows: for $C \in \mathbf{C}$ and a sieve S on $\mathbf{C}$, we set

$$j_C(S) := \{g : D \to C \mid g^*(S) \in J(D)\}.$$

We shall verify that j classifies J, i.e., for any $S \in \Omega C$, it follows that $S \in J(C) \Leftrightarrow j_C(S) = t_C$ or equivalently, $\mathrm{char}(J \rightarrowtail \Omega) = j$. Let $S \in \Omega C$. Suppose that $S \in J(C)$. Then, by the stability axiom of J, for any $g : D \to C$, we have $g^*(S) \in J(D)$. Therefore, we have $j_C(S) = t_C$. Conversely, suppose that $j_C(S) = t_C$. Then for any $g : D \to C \in t_C$, we have $g^*(S) \in J(D)$. Note that $t_C \in J(C)$. By the transitivity axiom of J, we have $S \in J(C)$. Therefore, j classifies J. By the condition for the subobject classifier $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$, j is the classifying morphism for $J \rightarrowtail \Omega$. The proof is complete. ■

In accordance with Theorem 3.4.1, we shall call the unique Grothendieck topology J determined by j via the pullback square (3.4.1) the *Grothendieck topology induced by j*.

To conclude this section, we shall prove that "a j-sheaf is a J-sheaf". To begin with, we shall reformulate the sheaf condition for a Grothendieck topology as follows.

Fact 3.4.1. *Let $(\mathbf{C}, J)$ be a site. A presheaf P on $\mathbf{C}$ is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$ iff for any $C \in \mathbf{C}$, any $S \in J(C)$ and the inclusion functor $i : S \hookrightarrow \mathbf{y}(C)$, the following mapping*

$$i_P^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P) \ni \mu \mapsto \mu \circ i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P) \tag{3.4.2}$$

is bijective. □

Proof. Let $P \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Suppose that P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$. Let $C \in \mathbf{C}$, $S \in J(C)$ and $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P)$ a matching family for S of P. Since P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$, there exists a unique amalgamation $x^\mu \in PC$ of μ, i.e., for any $f \in S$, $(Pf)(x^\mu) = x_f^\mu$ holds. Accordingly, we define a mapping $\alpha_S : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P) \to PC$ for $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P)$ as follows: $\alpha_S(\mu)$ is the unique amalgamation x^μ of μ. Clearly, this correspondence is bijective. On the other hand, by the Yoneda lemma, we have another bijection: $PC \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$, and we have a unique natural transformation $\tilde{\mu} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$ such that $\tilde{\mu}_C(\mathrm{id}_C) = x^\mu$. Then for all $f : D \to C \in S$, we have

$$\begin{aligned}
\mu_D(f) &= (Pf)(x^\mu) \\
&= (Pf)(\tilde{\mu}_C(\mathrm{id}_C)) \\
&= \tilde{\mu}_D(f) \quad \text{(by the naturality of } \tilde{\mu}) \\
&= (\tilde{\mu} \circ i)_D(f) \quad (\because f \in S)
\end{aligned}$$

This implies that i_P^* is bijective.

To prove the converse, suppose that the mapping

$$i_P^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P) \ni \mu \mapsto \mu \circ i \ni \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$$

is bijective for every $C \in \mathbf{C}$ and every $S \in J(C)$. To prove that P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$, we must show that every matching family $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P)$ has a unique amalgamation. To this end, let $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P)$. By assumption, there exists a unique natural transformation $\tilde{\mu} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$ such that $\tilde{\mu} \circ i = \mu$. By the Yoneda lemma, we have another bijection: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P) \ni \nu \mapsto \nu_C(\mathrm{id}_C) \ni PC$. Hence, there exists a unique element $x^\mu \in PC$ such that $\tilde{\mu}_C(\mathrm{id}_C) = x^{\tilde{\mu}}$. We shall prove that $x^{\tilde{\mu}}$ is an amalgamation of μ. Then for each $f : D \to C \in S$, we have

$$\begin{aligned}
(Pf)(x^{\tilde{\mu}}) &= (Pf)(\tilde{\mu}_C(\mathrm{id}_C)) \\
&= \tilde{\mu}_D(f) \quad \text{(by the naturality of } \tilde{\mu}) \\
&= \mu_D(f) \quad (\because \tilde{\mu} \circ i = \mu, \quad f \in S).
\end{aligned}$$

This implies that $x^{\tilde{\mu}}$ is an amalgamation of μ. To prove the uniqueness, suppose that $x \in PC$ is an amalgamation of μ. By the Yoneda lemma, there exists a unique natural transformation $\mu^x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$ such that $\mu^x_C(\mathrm{id}_C) = x$. Since x is an amalgamation of μ, for any $f : D \to C \in S$, we have

$$(\mu^x \circ i)_D(f) = \mu^x_D(f) = \mu_D(x) = \tilde{\mu}_D(f) = (\tilde{\mu} \circ i)_D(f).$$

Hence, we have $i_P^*(\mu^x) = i_P^*(\tilde{\mu})$. Since i_P^* is bijective, we have $\mu^x = \tilde{\mu}$. Therefore, we obtain $x = \mu_C^x(\mathrm{id}_C) = \tilde{\mu}_C(\mathrm{id}_C) = x^\mu$. The proof is complete. ■

Theorem 3.4.2. *Let $\mathbf{C}$ be a small category, j a Lawvere-Tierney topology on the presheaf category $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ and J the Grothendieck topology induced by j. Then a presheaf $P \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ is a sheaf for j iff P is a sheaf on the site $(\mathbf{C}, J)$.* □

Proof. Let $P \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Suppose that P is a sheaf for j. We shall prove that P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$. To this end, let $S \in J(C)(C \in \mathbf{C})$, i.e., $j_C(S) = t_C$ and $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P)$. We shall prove that the inclusion $i : S \hookrightarrow \mathbf{y}(C)$ is dense. To this end, it is sufficient to prove that for any $D \in \mathbf{C}$ and any $f : D \to C \in \mathbf{y}(C)(D)$, it follows that $f \in \overline{S}D$, i.e., $\overline{S} = \mathbf{y}(C)$. To prove this, let $f : D \to C \in \mathbf{y}(C)(D)$. Then, by the definition of the closure operator and the induced Grothendieck topology J, we have the following equivalences:

$$f : D \to C \in \overline{S}D \Leftrightarrow (j \circ \mathrm{char}(i))_D(f) = t_D \Leftrightarrow \mathrm{char}(i)_D(f) \in J(D).$$

Recall that the classifying morphism $\mathrm{char}(i)$ for $i : S \hookrightarrow \mathbf{y}(C)$ is defined as follows:

$$\mathrm{char}(i)_D(f) = \{g : D' \to D \mid (\mathbf{y}(C)(g))(f) \in SD\}.$$

Note that $(\mathbf{y}(C)(g))(f) = fg$. Hence, we have $\mathrm{char}(i)_D(f) = f^*(S)$. Since $S \in J(C)$, by the stability of J, $f^*(S) \in J(D)$. Therefore, we have $f \in \overline{S}$. Thus, i is dense. Now, since P is a sheaf for j, the mapping

$$i_P^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(S, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), P)$$

is bijective. This implies that P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$.

To prove the converse, suppose that P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$. Let $m : A \rightarrowtail E$ be a dense subfunctor of E. We shall prove that the mapping

$$m_P^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(E, P) \ni \tau \mapsto \tau \circ m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(A, P)$$

is bijective. To this end, let $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(A, P)$. We shall prove that there exists a natural transformation $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(E, P)$ such that $\tau \circ m = \sigma$. First, we shall define proposed τ. Let $C \in \mathbf{C}$ and $e \in EC$. Note that $\overline{A} = E$, since $m : A \hookrightarrow E$ is dense. By the definition of the closure operation and the induced Grothendieck topology J, we have the following equivalences:

$$e \in \overline{A}C = EC \Leftrightarrow (j \circ \mathrm{char}(m))_C(e) = t_C \Leftrightarrow \mathrm{char}(m)_C(e) \in J(C).$$

Note that $\mathrm{char}(m)_C(e) = \{f : D \to C \mid (Ef)(e) \in AD\}$. Put

$$\mu := \{\sigma_D((Ef)(e)) \mid f : D \to C \in \mathrm{char}(m)_C(e)\}$$

and $S := \mathrm{char}(m)_C(e)$ for short. We claim that μ is a matching family for S. To prove this, let $f : D \to C \in S$ and $g : D' \to D$. Then we have $fg \in S$, since S is a sieve on C. Then, by the naturality of σ, we have

$$(Eg)(\sigma_D((Ef)(e))) = \sigma_{D'}((Eg)((Ef)(e))) = \sigma_{D'}((E(fg))(e)).$$

Hence, μ is a matching family for S. Since P is a sheaf on $(\mathbf{C}, J)$, there exists a unique amalgamation $x_C^e \in PC$ of μ, i.e.,

$$\text{for all} \quad f : D \to C \in S, \quad (Pf)(x_C^e) = \sigma_D((Ef)(e)). \tag{3.4.3}$$

Define $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(E, P)$ for each $C \in \mathbf{C}$ and $e \in EC$ by

$$\tau_C(e) := x_C^e.$$

We must verify that $\tau : E \to P$ is a natural transformation. To this end, let $e \in EC$ and $h : D \to C$. We shall prove the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} EC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Eh"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & PC \arrow[d, "Ph"] \\ ED \arrow[r, "\tau_D"'] & PD. \end{tikzcd}$$

Note that $(Ph)(\tau_C(e)) = (Ph)(x_C^e)$. On the other hand, we have $\tau_D(Eh(e)) = x_D^{(Eh)(e)}$. Put $T := \mathrm{char}(m)_D((Eh)(e))$ for short. Then we have $T \in J(D)$, since $(Eh)(e) \in ED$. To show that $(Ph)(x_C^e) = x_D^{(Eh)(e)}$, it is sufficient to prove that $(Ph)(x_C^e)$ is the amalgamation of the matching family

$$\{\sigma_{D'}((Ef)((Eh)(e))) \mid f : D' \to D \in T\}.$$

In fact, by (3.4.3), for any $f : D' \to D \in T$, we have

$$(Pf)((Ph)(x_C^e)) = (P(hf))(x_C^e) = \sigma_{D'}((E(hf))(e)).$$

Thus, we obtain $(Ph)(x_C^e) = x_D^{(Eh)(e)}$.

Next, we shall prove that $\tau \circ m = \sigma$. To this end, let $C \in \mathbf{C}$ and $a \in AC$. Then we have $\tau_C(m_C(a)) = \tau_C(a) = x_C^a$. Note that $\mathrm{char}(m)_C(a) = t_C$. Then $\sigma_C(a)$ is the amalgamation of the matching family $\{\sigma_D((Ef)(a)) \mid f : D \to C \in t_C\}$. Therefore, we have $\sigma_C(a) = x_C^a = \tau_C(a)$. Thus, we obtain $\tau \circ m = \sigma$.

Finally, we shall prove that τ is the unique natural transformation in $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(E, P)$ such that $\tau \circ m = \sigma$. To this end, suppose that there exists another natural transformation $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(E, P)$ such that $\rho \circ m = \sigma$. To show that $\rho = \tau$, it is sufficient to prove that $\rho_C(e)$ is the amalgamation of $\{\sigma_D((Ef)(e)) \mid f : D \to C \in \mathrm{char}(m)_C(e)\}$ for every $C \in \mathbf{C}$ and every $e \in EC$. To this end, let $C \in \mathbf{C}$ and $e \in EC$. Put $S_x := \mathrm{char}(m)_C(e)$ for short. Note that $S_x \in J(C)$. Since ρ is a natural transformation from E to P, for any $f : D \to C \in S_x$, we have $(Pf)(\rho_C(e)) = \rho_D((Ef)(e))$. Note that $(Ef)(e) \in AD$ for all $f : D \to C \in S_x$, since $(Ef)(e) \in AD$. Note also that

$$\rho_D((Ef)(e)) = \tau_D((Ef)(e)) = x_C^{(Ef)(e)}$$

for all $f : D \to C \in S_x$, by the assumption $\rho \circ m = \tau \circ m$. Hence, we have $\sigma_D((Ef)(e)) = \rho_D((Ef)(e))$ for all $f : D \to C \in S_x$. By the naturality of ρ, we have $(Pf)(\rho_C(e)) = \sigma_D((Ef)(e))$ for all $f : D \to C \in S_x$. This implies that $\rho_C(e)$ is the amalgamation of $\{\sigma_D((Ef)(e)) \mid f : D \to C \in \mathrm{char}(m)_C(e)\}$. Therefore, we have $\rho_C(e) = \tau_C(e)$. Thus, we obtain $\rho = \tau$. The proof is complete. ∎

参考文献

[1] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[2] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, corrected 2nd ed., Springer, 1994.

[3] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium Volume 1*, Clarendon Press, 2002.

[4] 古賀 実, 「Grothendieck 位相・サイト上の層・層化関手に関するノート」, The Dark Side of Forcing vol. IV, 第 3 章, 2014, (http://forcing.nagoya/).

[5] 古賀 実, 「Grothendieck トポスの基本性質に関するノート」, The Dark Side of Forcing vol. V, 第 3 章, 2015, (http://forcing.nagoya/).

淡中 圏　本名：田中健策　今回はみんな忙しかったみたいで、誰も何もしない感じで、いい感じでした。この「締め切りが通り過ぎて行く時の音が好きだ」と言ったのは確か SF 作家のダグラス・アダムズだったような気がしますけど、確かにあのドップラー現象はやみつきになりますな。ジリジリと近づいて生きて、通り過ぎるときは一瞬。そしてあの低い余韻ときたら。通りすぎてから捕まえられないように禿げていると言われる締め切りの後頭部の感触を知っているものは幸いである。次の機会にはただ通り過ぎるのを座視するだけでなく、締め切りとダンスをするくらいの気概を持ちたいものです。

よく分からないブログ　`http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/`

鈴木 佑京　今回は箇条書きで書きます。

- コミケだわーい。
- 名古屋のみなさん今回もありがとうございます。
- RWBY 面白い。
- スターウォーズ悪くないが微妙。
- クリード見たい。
- 修論がめんどい。
- RWBY の vol.2 が早く見たい。
- DVD 買いすぎて金が無い。
- 来年以降もほそぼそと学問したい。
- 就活楽しい。
- みんなもやろう。

でわでわ〜

古賀 実　今回も本を厚くするお仕事をしました.

編集後記: まえがきでもちょっと書いたけど、この同人誌は岐路に立ってる気がする。なんというか始めたばかりの頃は、みんな書きたいことがたくさんあったけおど、5 冊も出しちゃうと、さすがにもう書くネタがなくなってくる。たとえネタがあっても、大ネタで書くのに準備がいるとなると、毎年書かなくちゃと言いながら毎年「次こそあれを書くぞ」となってしまいがち（自分のことです）。

それにだんだんみんな忙しくなって、数学遊びばっかりしてられなくなってくる人も多い。

どうしたもんかなあ。

新しい書き手を探すしかないんだろうなあ。でも何人か書いてくれるって人はいたけど、結局出来てみればいつものメンバーなんだよなあ（軽い恨み節）。

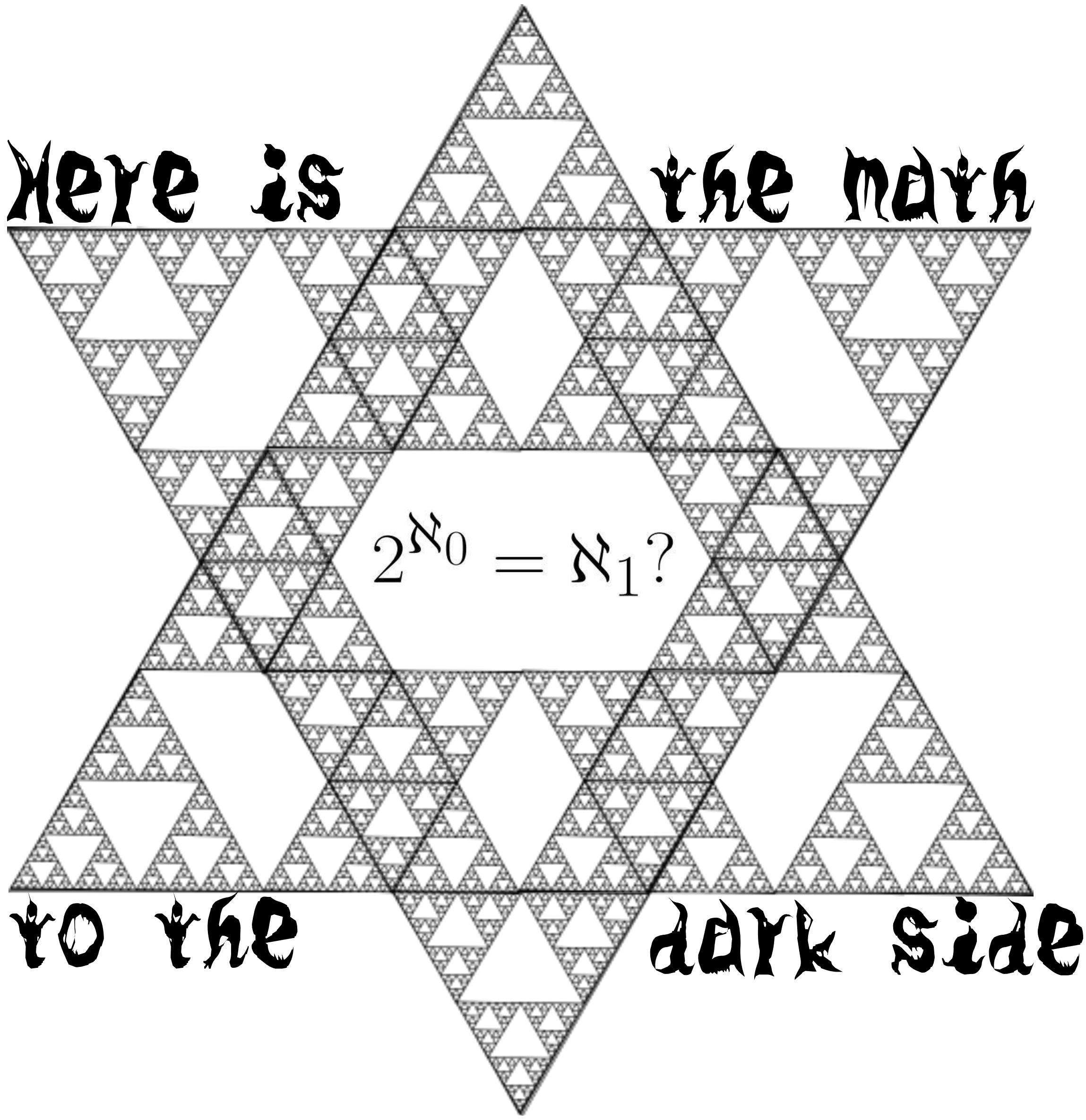
てなわけで随時書き手募集中でっす！（なげやり）

【淡中　圏】

発行者 ： The dark side of Forcing

連絡先 ： http://forcing.nagoya

発行日 ： 2015 年 12 月 31 日


Here is the math
$2^{\aleph_0} = \aleph_1?$
to the dark side