THE DARK SiDE OF FORCiNG

vol. $2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$

Once upun a time...
遠い昔……

Once upon a time, in the magical land of Equaltria, there were two regal sisters who ruled together and created harmony for all the land. To do this, the eldest used her unit power to let numbers multiply; the younger summed numbers up to let them unite. Thus, the two sisters maintained balance for their kingdom and their subjects, all the different types of numbers. But as time went on, the younger sister became resentful. She was a zero, and her sister was the one. A desire began to take form, that she be like her sister.

$$0 = 1$$

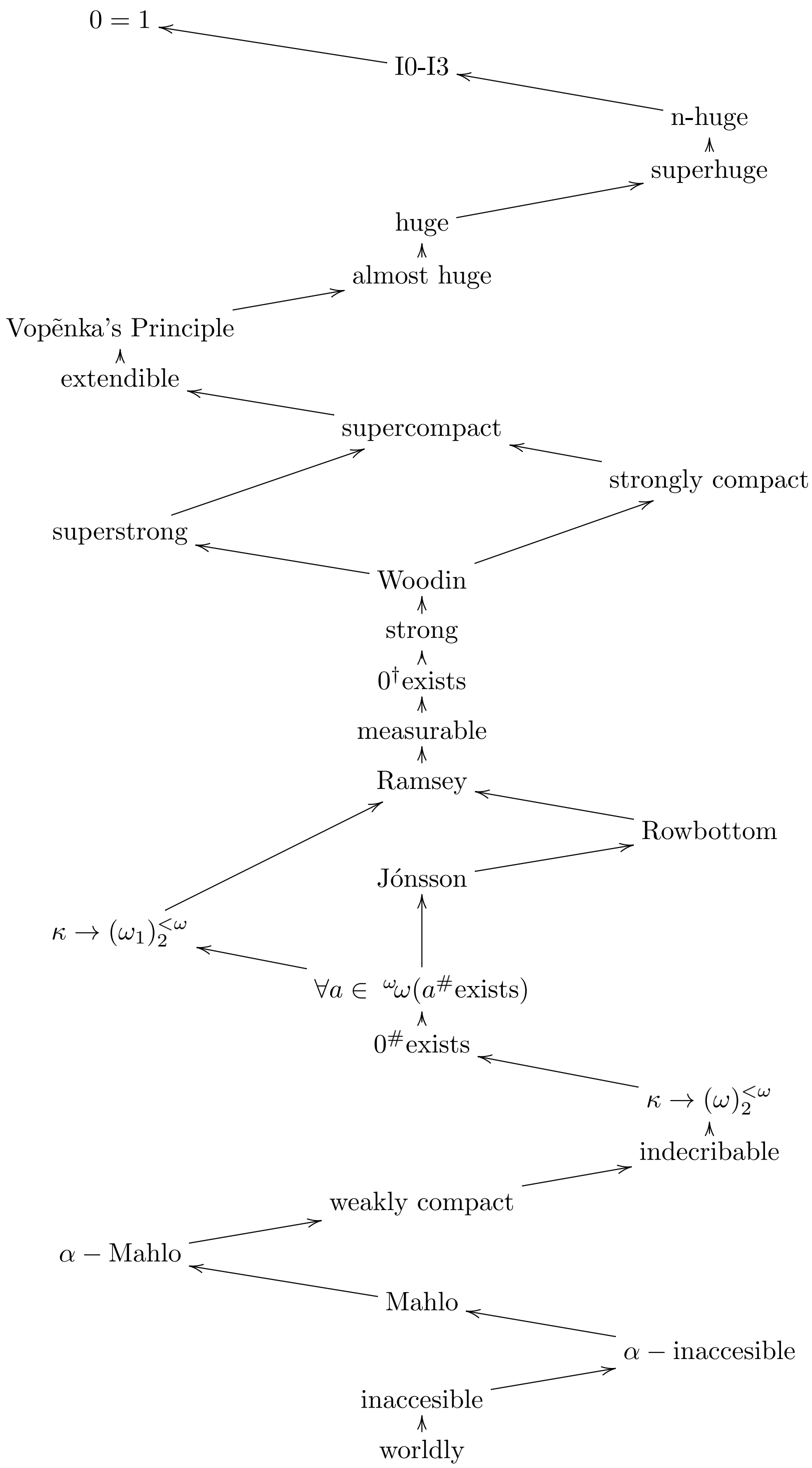
So she started developing the method of climbing the hierarchy of infinities toward $0 = 1$ surpassing cardinals inaccessible, indescribable, subtle, ethereal...

遠い昔、魔法の国イコールトリアを、特別な姉妹が調和の下に統治していました。そのために、姉は彼女の端厳な力で数たちを増積させ、妹は数たちを和の中にまとめていました。こうして、姉妹は彼女たちの王国と、様々な種類の数からなる彼女たちの臣民たちのバランスを保っていたのです。ところが時が経つとともに、妹がだんだんと不満を持ちはじめました。彼女は単なる無であり、姉は唯一だったからです。彼女は姉のようになりたいと思うようになりました。

$$0 = 1$$

そのために、到達不可能な、記述不可能な、名状しがたい、天空の……無数の枢機卿たちを超えて、無限の階梯を 0=1 に向けて登るための方法を、彼女は作り出しはじめます。

図 1　$0 = 1$ へと至るヤコブの階梯
（Kanamori, A.,*The Higher Infinitie*,Springer(2005)P472 の図を改変）



This is the origin of **The Dark Side of Forcing**.

これが **The Dark Side of Forcing** の始まりである。

目次

第 1 章

The Pony Side of Forcing

サショー☆シロカミ

1.1 集合論 @ ポニーヴィル学派

ポニーヴィルは集合論の中心地である．

生活，自然の至る所で魔法が使われ，天候をも魔法で管理する，まさしく魔法の国の**エクエストリア**において人気筆頭の研究対象はもちろん魔法学なのだが，ポニーヴィルには魔法の研究よりも数学に熱心なポニーの方が多い．とりわけ，数学基礎論．そのまたとりわけ，**公理的集合論**に．「ポニーヴィルの名産は林檎であり，方言は集合論である」とはエクエストリアの数学者の間でよく囁かれる冗句だ．

トワイライト・スパークルは才能あるユニコーンのための王立魔法学校の出である．エクエストリアの統治者であり，トワイライトの師匠でもある**〈プリンセス〉セレスティア**からとある命を受けて此処ポニーヴィルにやってきた．守衛のペガサスの牽(ひ)く天馬車に導かれて数時間，ようやく降り立った新天地に初めて蹄の印をつけたとき，彼女はこれ以上になく釈然としない表情であった．というのも，〈プリンセス〉の勅命は数学や魔法に関係したものではないように思われたからだ．

「あなたにとって全く新たな地で**友情の魔法**を学んできなさい」

凛として，それでいて優しさも含んだ声で〈プリンセス〉はトワイライトにそう言った．少なくとも数学は関係ないと言えるが，かといって友情に魔法というのも彼女にとってナンセンスな概念の組み合わせであった．

友情の魔法という意味不明な代物はひとまず置いておき，もう一つ言い渡されたことだけは守ろうとなんとかモチベーションを保つ．それは，〈プリンセス〉セレスティアの象徴でもある太陽が最も輝く夏至の日のセレモニーにて裏方指揮をすることであった．これもまた数学や魔法とは関係がない，乱暴に言えば雑事である．学問に触れる意味でポニーヴィルに行けたなら首を縦に振ろうものを，それとは無関係なことで行かされるのはハッキリ言って嫌だった．内心で不平不満の嵐だったものの，師匠の役に立てるというだけで十分だととりあえず納得はして赴く気になれた．

個性豊かなポニーたちに振り回されつつも物事は進み，途中で千年前に月に封印されたナイトメアムーンが復活して危うく永遠の夜を招きそうになる事件も起きたが，トワイライトがそこで友情の魔法を知ると共にその力で以て悪夢(ナイトメア)を祓うことができたのだっ

た．ナイトメアムーンと化していたのは〈プリンセス〉セレスティアの実の妹**〈プリンセス〉ルナ**であり，闇から解放されてからは千年のブランクを埋めるべく日々公私奮闘中である．

その出来事でトワイライトが得たかけがえのない仲間と，真に友情の魔法を知りたいという彼女自身の意思が，ポニーヴィルでの彼女の生活を充実させる絆となり，今もなお彼女とその仲間達の物語は廻り続けている…….

さて，最初に述べた通りポニーヴィルは集合論の最も盛んな地である．数百年前には数学の難問をお互いに披露しあって解けるかどうかと決闘することが一部で流行っていたが，此処にはそれと似た学問の空気が至る所に漂っている．学問に対し並々ならぬ興味をもつトワイライトがその毒気にやられ，沼に引き込まれるまでにそう時間はかからなかった．

1.2　とある日のゼミにて

トワイライトが住まう図書館の地下で，今日もまた彼女は集合論の勉強である[*1]．本日の指導教官は友情の魔法で笑いのエレメントを司る**ピンキーパイ**と，忠実のエレメントを司る**レインボーダッシュ**．

ピンキーパイはポニーヴィルのケーキ屋で働くかたわら，日々パーティプランナーとしてせわしなく元気一杯に村中を跳ね回っている．唐突で不思議な言動も多く，周囲はそれに振り回されることもしばしばあるが，ピンキーパイの笑顔に救われた者は数知れない．

レインボーダッシュは村一番，いや国一番のスピードフライヤーを自称するペガサスであり，負けん気が強く目立ちたがり屋な女の仔だ．しかし実際として彼女はいくつもの輝かしい成績を大会で残しており，最近では念願叶ってとある飛行チームのメンバーとなった．

どちらも日々の振る舞いを見ると数学には目もくれない自由闊達な雌ポニー達に思えるし，実際そうである．しかし集合論だけやたらと詳しい．

「さあ，いよいよここまでやって来たね」

「お待ちかね，**強制法**だよ～！」

トワイライトはごくりと唾を飲んだ．彼女が過去魔法学で取り組んできた勉強の経験が功を奏し，集合論をゼロから学び始めてから驚異的なペースでここまでやって来た．すっかり集合論に魅入られた彼女にとって，現代集合論の画期的技術である強制法は夢と可能性の塊に見えていた．

「それじゃあ，まずは準備からするわね」

トワイライトは概要があらかじめ書いてある黒板を部屋の隅から魔法で引っ張り，ふたりのポニーの前に提示する．そして，化学実験用の頑丈なテーブルを部屋の中央に設置した後，彼女の角から細い魔法の糸がゆっくりと紡がれ，その卓の上に形を織りなしていく．魔法（マジック）に論理（ロジック）の要素を取り入れた彼女独自の集合論プレゼンはこうして始まるのである．

「ZFC を仮定して話をするわね．この宇宙（ユニバース）を V と表しておきます．V の中で，今から議論するのに十分な有限個の公理を ZFC からとってきて，その公理系の**可算推移的モデ**

[*1] 強制概念に関する性質や一部の用語などはトワイライトが過去にやったこととして説明を省いている．一部は注釈で説明を付け加えることもある

ル $\langle M, E\rangle$ をひとつ取って固定しましょう．M を推移的崩壊させたもの[*2]の方がやりやすいので，今後，関係 E は $\in$ として書くことにするわ．強制概念 $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}}\rangle$ を M 内で取って，これを核に M を拡張していく」

「なんで全部が揃ってる V で話をしないのかな？」

「今から始めることを V で実行すると，V の中に存在しないもので議論しなければならなくなるから．V は集合全体の宇宙だし，その中に存在しない対象をとって話をしようというときに，その対象を集合論の言語で扱えない……ということでいいかしら？

可算推移的モデルで議論する強みは M の中に存在しなくても V の中に存在することが保証されていること．だから，V や M といった議論の対象になっている宇宙を適切に移動することで集合論で今まで使ってきた文法で話すことができるのね．じゃあ，M の中に存在しない対象ってなんなのか？　たとえば V での ω_1 は可算モデル M の中に存在しない対象だわ．M の中で ω_1 と認識されている集合は V で見ると可算な順序数として存在してる．けれど，強制法で使うもっと重要な『M 内で存在しないかもしれないモノ』は今から言う概念ね」

定義 1. $\mathbb{G} \subset \mathbb{P}$ が M **の上を渡る** $\mathbb{P}$**-ジェネリックフィルター**とは，$\mathbb{P}$ 内で稠密な任意の $D \in M$ に対し，$\mathbb{G} \cap D \neq \emptyset$ となるような $\mathbb{P}$ のフィルターのこと．

「強制概念 $\mathbb{P}$ が無原子的，つまり，任意の $\mathbb{P}$ の元が両立しない 2 元に拡張できるとき，M の上を渡る $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルター $\mathbb{G}$ は M で存在しないことが示せるわ．なぜなら $\mathbb{P} \setminus \mathbb{G}$ も稠密になって，$\mathbb{G} \in M$ と仮定すると交わらないはずの $\mathbb{P} \setminus \mathbb{G}$ とも交わることになるから」

「オッケーオッケー！　ところで V の中でピュアに $\mathbb{G}$ がとれないってことをトワイライトは言ったんだけど，あながちそうでもないんだよね〜」

「へ？」

ピンキーパイの指摘が一瞬強烈な刃となって脳内を切り刻みそうな気配がした．しかし自分の勉強したことの中に思い当たる節があり，それを見つけたと同時に「しまった」と呟く．ゼミではえてして自分の口が勢い任せにいい加減なことを吐き出し，こういった冷や汗を招く場面があるものだ．

「むしろ，完全に形式的に $\mathbb{G}$ とかを V だけで議論する方法があるよ．そっちの方がキミにピッタリ合いそうな方法だと思うけどね」

「ああぁ，ごめんなさい．そうだったそうだった」

指摘が続く前にトワイライトは強引に自分の台詞を挿し込んだ．

「今やっているのは意味論的な導入で，イメージを掴みやすくするためのやり方だったの．ジェネリックフィルターをピンキーやレインボーダッシュが言ったように V の外側を間接的に議論する方法は，今から定義する名称という概念を使ってできるわ」

[*2] Mostowski 崩壊のこと．

定義 2. τ が $\mathbb{P}$-**名称**とは，τ が 2 つ組 $\langle\sigma,p\rangle$ たちの集合で，σ は $\mathbb{P}$-名称，p は $\mathbb{P}$ の元である．

「名称は M の外側の対象を記述する概念よ．名称はある整礎関係上で再帰的に定義されたものなので，『〜は名称である』という主張は ZF の任意の推移的モデルで絶対的になる．これから解説する強制関係も絶対的になって，んで結果的には，V の外側をさえあたかも記述しているとみなせることになります．今回は意味論的な話でやっているから，V でどうこうという話はもう置いとくわね．紛らわしいし．というか，M で話を始めることが無難かなと思って今回は V での話までできるほど準備はしてないのよね……ゴメンナサイ．[*3]
——まず基本として，任意の $x \in M$ に対して**チェック名称** $\check{x} := \{\langle\check{y}, 1_{\mathbb{P}}\rangle : y \in x\}$ を集合のランク上で再帰的に定義しておいて，そして，$\mathbb{G}$ を記述するには次のようにすればいい」

$$\dot{\mathbb{G}} := \{\langle\check{p},p\rangle : p \in \mathbb{P}\}$$

「さて，モデル M から $\mathbb{G}$ を含むように拡大した $M[\mathbb{G}]$ というモデルを今から作るわけだけど，M の中から $\mathbb{G}$ を説明するにはこの名称 $\dot{\mathbb{G}}$ を用いるワケ．$\mathbb{G}$ を使った $\mathbb{P}$-名称たちに対する説明の仕方，つまり解釈を与えれば，$M[\mathbb{G}]$ という新しいモデルを与えることができる．じゃあ次に『説明する』窓口を与えるわ……っと，その前に，強制言語と $\mathbb{G}$ による解釈を導入しなきゃ．$\mathbb{P}$ に関する**強制言語** $\mathcal{L}_{\mathrm{force}}$ は，集合論の言語に定数記号として M 内の $\mathbb{P}$-名称を加えたものとするわ．そして……」

定義 3 ($\mathbb{G}$ **による解釈**)**.**
τ を $\mathbb{P}$-名称，$\mathbb{G}$ を M 上を渡る $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルターとする．このとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{val}_{\mathbb{P}}(\tau,\mathbb{G})(=\tau_{\mathbb{G}})\\ &\qquad := \{\mathrm{val}_{\mathbb{P}}(\sigma,\mathbb{G}) : \exists p \in \mathbb{G}[\langle\sigma,p\rangle \in \tau]\}\end{aligned}$$

と定め，これを τ **の** $\mathbb{G}$ **による解釈**と呼ぶ．

定義 4. $\mathbb{G}$ を M 上を渡る $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルター，$\varphi(\tau_0,\ldots\tau_{n-1})$ を強制言語の閉論理式とする．このとき，

$$M[\mathbb{G}] \models \varphi \text{ iff } \varphi((\tau_0)_{\mathbb{G}},\ldots,(\tau_{n-1})_{\mathbb{G}})$$

としてモデル $M[\mathbb{G}]$ を定める．宇宙は M における $\mathbb{P}$-名称全体とし，$M^{\mathbb{P}}$ と書く．

「これで $M[\mathbb{G}]$ について語ることができるわね．次の補題がすぐに成り立ちます」

補題 5. $\mathbb{G}$ を $\mathbb{P}$ 上のフィルターとする．以下が成り立つ：

1. 任意の $x \in M$ に対し $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ で $x \in M[\mathbb{G}]$.

[*3] ピンキーパイ「トワイライトは自分の経験したことを逐一マニュアルにしちゃうくらい几帳面なんだけど，それと裏返しで他のポニーがウマいこと作っちゃったテキストやマニュアルに忠実になりすぎちゃうのが欠点なのよね〜．数学のゼミではテキストの言うことを行間を埋めながら忠実になぞるだけじゃなくて，自分の考えでどう進めていこうかも決めて進んでもいいんだよっ．トワイライトは頭いいんだから，むしろそうして欲しいなっ！」

2. $M \subset M[\mathbb{G}]$.
3. $\mathrm{val}(\dot{\mathbb{G}}, \mathbb{G}) = \mathbb{G}$，よって $\mathbb{G} \in M[\mathbb{G}]$.

「ここでは単にフィルター性だけで示せるの？」
「うん，大丈夫．次も $\mathbb{G}$ がフィルターだとして示せるわ」

補題 6. 以下が成り立つ：

1. すべての $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ に対して $\mathrm{rank}(\tau_{\mathbb{G}}) \leq \mathrm{rank}(\tau)$.
2. $M[\mathbb{G}] \cap \mathrm{ON} = M \cap \mathrm{ON}$．つまり $M[\mathbb{G}]$ に新たな順序数は作られない．

「rank に関する帰納法を使って，名称の構造や名称が解釈されたときの対象のカタチを思い出せば 1 番目は示せるわ．順序数 $\alpha \in M[\mathbb{G}]$ をとって，それを表す名称 τ をとると，rank の絶対性から $\alpha = \mathrm{rank}(\alpha) \leq \mathrm{rank}(\tau) \in M \cap \mathrm{ON}$ になり，先の $M \subset M[\mathbb{G}]$ と組み合わせると 2 番目の主張の等号が成り立つことがいえます」

定義 7 (強制関係の意味論的な定義).
$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を集合論の論理式とし，$\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$ を $\mathbb{P}$-名称，そして $p \in \mathbb{P}$ とする．**強制関係** $\Vdash_{\mathbb{P}}$ を次のように定める：

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_0, \ldots, \tau_{n-1})$$

とは, p を含む M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルター $\mathbb{G}$ をとったとき, $\varphi^{M[\mathbb{G}]}((\tau_0)_{\mathbb{G}}, \ldots, (\tau_{n-1})_{\mathbb{G}})$ となることを意味する．

要するに p が窓で，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ の右側がその窓を通して見た風景ということね」
「んー．窓っていうのはちょっと変かもしんないなぁ．ボクとしては拡大したモデル――$M[\mathbb{G}]$ のことだけどさ――で φ が成り立ってくれる確率っていうイメージを推したいね」
「確率？」
トワイライトの頭には漠然と三角形の確率空間がぽかんと浮かんでいた．しかしそれは教官たちの認識とはかなりかけ離れたものである．彼女がなんとなく空中に自分のイメージを投影してみると，ピンキーパイが即座に笑って否定した．

「アハハ！　そのまんまの素朴な意味での確率じゃないってば．あなたには多値論理の値って言った方が通じるかもね．いわゆる**ブール代数**，もっと言えば**完備ブール代数**だよっ」
「ちょっと前に強制概念の完備化についてラリティ[*4]がレクチャーしてくれてたことを思い出してよ．完備化をすると元の強制概念が稠密に埋め込まれている完備ブール代数に

[*4] トワイライトの大事な友達のひとりで，ポニーヴィルで服のデザインや仕立てをして生計を立てているユニコーンの女性．友情の魔法では**寛容のエレメント**を割り当てられている．

なってるんだけど，それで強制法の議論をする方がボクは好き……というボク自身の好みは置いといて，それで考えたら $M[\mathbb{G}]$ での φ のもっともらしさってのが完備ブール代数での値に相当するわけね」

「レインボーダッシュは特に**ランダム強制**にこだわりをもってるからねー」

「なるほど……p は向こうの景色を見る窓としての曇り具合も表してる，ということね」

なんとなく彼女は窓の喩えを撤回せずに続けたかった．レインボーダッシュは「まあいっか」と苦笑し，続きをウインクで促す．

「あなたの考えている見方も忘れないようにしとくわ．さて，これでメインの話へのお膳立ては整えられたかな．一足先に定理を述べておきましょう：

定理 8 (真理性定理)**.** $\mathbb{G}$ を M の上を渡る $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルター，$\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ を $x_0, \dots, x_{n-1}$ を自由変数にもつ集合論の論理式とし，$\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ を $\mathbb{P}$-名称とする．もし $M[\mathbb{G}] \models \varphi(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ ならば，ある $p \in \mathbb{P}$ が存在して，強制関係 $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ が成り立つ．

さらに，強制関係で定義された集合は M の中に属することも言える：

定理 9 (φ に関する定義可能性定理)**.** $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ を集合論の論理式とし，$p \in \mathbb{P}$ を 1 つとる．このとき，クラス

$$\{\langle \tau_0, \dots, \tau_{n-1} \rangle : p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})\}$$

は M で定義可能である．

特に $\mathbb{P}$-名称の（集合の構造としての）ランクを M 内で制限すれば，$p \Vdash \varphi$ となる $\mathbb{P}$-名称の n 個組全体は M に属する，つまり M における集合となっている……．$\Vdash$ の右側は M の外側で起きていることを記述してるし，名称は M の外側の対象を記述しているものだから，外側で何か成り立つことを予期する名称全体を M で定義できるのは正直不思議な感じね」

「本質的なのは，M の外側にあるかもしれない $\mathbb{G}$ を使って定義した強制関係そのものが，実は M の内側だけで説明できてしまうことにあるんだよ．V で考えても然り．ただ，論理式をいっぺんに取ってさっきの定義可能性定理が示せるかどうかは？」

「それは定義不可能性定理[*5]から無理ね．φ をひとつ固定しておいて，それに対して十分な個数の公理が成り立つある可算推移的モデルをとってきてやれば，上の主張の結論を証明できるという**図式**だから」

「まあだから，本当に厳密にやりたければ，$M[\mathbb{G}]$ で成り立たせたい特定の命題を最初っから決めておいて，それにむけて必要な数の公理を予め準備しておかないといけないんだよね．トワイライトならそういうスケジュールやチェックリストを作るの，簡単にできそうな気はするけど，大概のポニーは『できるんだからいいでしょ』ってことで，一々細かく見ながら強制拡大はしないかな」

トワイライトの首がびくりと固まった．ピンキーとレインボーは顔を見合わせて「まさか」と一緒に言葉を吐いた．

[*5] たとえば ZFC のモデルで成り立つ論理式 φ の全体は定義不可能である．一階述語論理における Tarski の定義不可能性定理．

「$2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$ のモデルを作る魔法，作っちゃったんだけど……」

レインボーダッシュは自身の七色の鬣（たてがみ）を前脚で掻きまわし，「馬鹿正直なヤツ！」と呆れて叫んだ．ピンキーパイは爆発した雲のような桃色の鬣の中からアップルパイを持ち出してすっかり鑑賞態勢に入っている．

「必要なら公理リストと証明スケジュール見とく？」

「いや，げっぷが出るからいいや．でももしかしてってこともあるから残しとくといいかもね」

レインボーダッシュはピンキーパイから蹄渡（てわた）されたアップルパイを蹄で弄びながら言った．まだ詳細な議論には入っていないが，とりあえずデモンストレーションとして彼女の構築した強制法がどんなものか見てもいいかと，教官ふたりは静観するようである．

生徒は頷き，目を瞑り，角より出でる魔法を強める．

外延性，空集合，対集合，和集合，冪集合，基礎，選択公理……必須の基本公理たちはそれぞれわかりやすい色や記号でマークされて出てきた．それぞれ EC, $\emptyset, \{\cdot\}, \cup, \mathcal{P}, \in\in\in$, AC と書かれてある．ついで，なにがどういう形なのかは魔法の連続的な流線に紛れて判別つきかねるが，細かな青色光が角から次々と放たれる．置換公理たちである．分出公理は置換公理から導けるので入れていない．空集合の記号 $\emptyset$ が小さな魔法陣のように卓の表面にぴたりと張り付き，そこから論理の細かな編み目が独りでに成長していく．そんな，魔法を原料として紡がれる論理の糸たちの緻密さには，毎度教官も魅入られている．成長の中心軸として順序数（と思しきモノ）たちがとられているが，トワイライトの曰く，有限な数は 0 から 255 の 2^8 個までしかとられていないらしい．ω や ω_1 など，無限の領域にある対象はそれらのもつ代表的な性質で記述され支えられている．が，細かすぎてよく見えない．とりあえずどこに ω や ω_1 などがあるのかは彼女がマークをしてくれている．

視点をマクロに移せば，テキストやノートでよくみる集合論の宇宙の模式図をほぼほぼ再現しているのが誰の眼にもわかった．いや，見た目だけでも再現以上である．まるで生き物の身体をめぐる血管にネオン光が満遍なく満たされているように強くぼんやりと輝いて，無数のパターンを描く証明の繊細な梯子が絶妙なバランスでお互いに支え合っている．どこか無機質な存在感でありながら，どこか有機的に鼓動するかのような，相反する臨場感を覚える逆三角錐のホログラムが完成した．魔法の主はそこで一旦魔法の動きを止めた．

「これが一応 M のつもり．本物と比べるとスカスカだけどね．次に必要な素材を使って拡張するわ」

「なんだかアイスのコーンみたいだね！」

ピンキーパイの喩えは当然のようにスルーし，彼女自慢の魔法を再開し始める．

内部で強制概念 $\mathbb{P}$ が浮かび上がる．そこから無数に近い $\mathbb{P}$-名称の群が小さな斑点として点滅し出す．ジェネリックフィルターに対応する名称 $\dot{\mathbb{G}}$ と $\mathbb{P}$ がとりわけ強く明滅し，互いに何か情報をやりとりしていた．やがて $\mathbb{P}$ の内部に木の根のような道筋が現れ，$\mathbb{G}$ という文字が浮かぶ．三頭は今宇宙の外側から見ているのでこうして認識できているが，自動化された体系の中では認識された旨の信号などはどうやら出ていない．

ひとつひとつの名称が $\mathbb{G}$ による解釈によって新たな集合を外側にゆっくりと放出しコーンの外側に張り付いていく．そうして徐々に徐々にと鋭いコーンは緩やかに太っていった．また，横だけでなく縦にも成長が続いており，太ったコーンの上にこんもりとした半球が順序数の軸の周りに出来始めている．当然，ピンキーパイはアイスクリームに喩

えることを忘れはしなかった．

「はい，これで強制拡大終了っと」

複雑精緻極めた数学のミニチュア．製作者は目から妖し気な緑と紫のオーラを漂わせながらにんまりと口角を上げる．いつの間にか真っ暗になっている部屋の中で，光源はこのミニチュアの放つ魔法の淡い純粋な光だけで，その間近に立つ生みの親は自分の顔と首筋だけを強く照らされ，相対的にそのほかの部位は闇の中に飲み込まれているかのように見えた．一種狂気を孕んだ彼女の恍惚な表情と，身体の明暗のコントラストの不気味さが，ピンキーパイとレインボーダッシュにぞくりと背筋の悪寒を覚えさせた．

「問題の $2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$ はここね」

中途半端な位置に現れた新しい光点を蹄指し，レインボーダッシュがとっさの疑問符を頭から出した．

「ん？　なんで順序数の上に無いの？」

「命題だからよ．$\aleph_{10}$ を指してたら単に対象（オブジェクト）として 10 番目の基数をとってきただけだし，符号（コード）化された命題は大体この辺にありますよーって言った方がむしろ現実味があっていいかなって」

トワイライトはそう言って数学魔法に固定化を掛け，自分自身の魔法との繋がりを絶つ．剥製のように佇むソレは純粋な魔法の産物であるが故，翌日には儚く霧散してしまう運命にある．

「まあこれは部屋の端の地球儀くらいに思っておいて，……続きを始めるわね．M は今まで通り十分な数の公理が成り立ってる可算推移的モデルとしてとっているのだけど，そういうのを一々断る代わりに，$M \models \mathrm{ZFC}$ とか $M \models \mathrm{ZF}$ とか $M \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ と書いて，そういう意味で使うことにするわ．$M \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ は選択公理と冪集合公理を除いた，かつ証明に必要なだけの公理群ということね．$M[\mathbb{G}] \models \mathrm{ZFC}$ と主張の結論で来たときは，**「任意の ZFC の有限個の公理たち Γ に対して，$M[\mathbb{G}] \models \Gamma$ となるように十分豊富な**[*6]**可算推移的モデル M が取れる」**ということ．

ちなみに，今の文脈で $M[\mathbb{G}] \models \mathrm{ZFC}+2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$ ということが示されれば，$\mathrm{ZFC}+2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$ のモデルが**コンパクト性定理**によって存在するので，$\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_{10}$ が ZFC に対して相対的無矛盾であるといえるの．

強制法に関する真理性と定義可能性を示す前に，それらの定理を仮定して次の重要な定理を示しましょう：

定理 10. $M \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ とする．$\mathbb{P} \in M$ を強制概念，$\mathbb{G}$ を M の上を渡る $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルターとする．このとき $M[\mathbb{G}] \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ である．さらに，$M \models \mathrm{ZF}$ ならば $M[\mathbb{G}] \models \mathrm{ZF}$ となり，$M \models \mathrm{ZFC}$ ならば $M[\mathbb{G}] \models \mathrm{ZFC}$ となる．

難しいのは冪集合，置換，選択公理なので，それらを証明してそれ以外は省略するわ」

「空集合公理や無限公理とか，$\check{\emptyset}(= \emptyset)$ と $\check{\omega}$ で終了だもんね」

「対の公理は σ, τ を名称として $\mathrm{up}(\sigma, \tau) := \{\langle \sigma, 1_{\mathbb{P}} \rangle, \langle \tau, 1_{\mathbb{P}} \rangle\}$ って定義すると，これが対集合の名称になるわ．ちなみに順序対の名称は $\mathrm{up}(\sigma, \tau) = \mathrm{up}(\mathrm{up}(\sigma, \sigma), \mathrm{up}(\sigma, \tau))$ って表せる．要するに，集合の存在に関する公理について，与えられた仮定から適切な名称を定義できることを示せば $M[\mathbb{G}]$ で成り立っているといえるわ」

[*6] 「証明で使うのに十分多くの，しかし高々有限個の公理を成り立たせるだけの」という意味で．

「じゃあ，外延性や基礎の公理は？」

レインボーダッシュがすかさず突っ込む．これらは集合の存在に関する公理ではないので，具体的に名称をとればいいという話が当てはまらないからだ．トワイライトは特に乱れる様子もなく，証明を黒板にすらすらと書き連ねる．

「$M[\mathbb{G}]$ での仮定を V で翻訳して考えればいいわ」

外延性と基礎の公理の証明．$M[\mathbb{G}] \models \forall x[x \in \sigma \leftrightarrow x \in \tau]$ とする．解釈の仕方から，$\sigma_{\mathbb{G}}, \tau_{\mathbb{G}}$ の要素の形は，なんらかの名称の解釈 $\cdot_{\mathbb{G}}$ に注意する．このことと仮定から

$$\forall x[[x \in \sigma_{\mathbb{G}} \leftrightarrow x \in \tau_{\mathbb{G}}]$$

となるので，V での外延性公理で $\sigma_{\mathbb{G}} = \tau_{\mathbb{G}}$，つまり $M[\mathbb{G}] \models \sigma = \tau$.

次に，$M[\mathbb{G}] \models \pi \in \sigma \in \tau$ になっていたら，$\pi_{\mathbb{G}} \in \sigma_{\mathbb{G}} \in \tau_{\mathbb{G}}$ となってて，V での推移性より $\pi_{\mathbb{G}} \in \tau_{\mathbb{G}}$．よって $M[\mathbb{G}] \models \pi \in \tau$．よって推移的.

V で $\tau_{\mathbb{G}}$ を考えると，この集合より下の $\in$ に関する極小元は必ず存在する．ゆえに，$M[\mathbb{G}]$ で考えてもそうである． □

冪集合公理の証明．まず冪集合公理は次の論理式で表されていることを確認する：

$$\forall x \exists y \forall z \forall w[[w \in z \rightarrow w \in x] \rightarrow z \in y].$$

つまり，集合 x に対しその部分集合を全て含むような集合 y が存在する．したがって，$a \in M[\mathbb{G}]$ を任意にとり，$\mathcal{P}(a) \cap M[\mathbb{P}] \subset b$ なる $b \in M[\mathbb{G}]$ を構成すればよい．$a = \tau_{\mathbb{G}}$ となる $\mathbb{P}$-名称 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ をとる．そして，$Q = \mathcal{P}(\mathrm{dom}(\tau) \times \mathbb{P}) \cap M$ とし，$\pi = Q \times \{1_{\mathbb{P}}\}$ とする．なお $\mathrm{dom}(\tau)$ は τ に属する順序対の 1 つ目の元を抽出したもの全体を表す．Q の任意の元は M 内の $\mathbb{P}$-名称となっていることに注意すると，今定義した π は M 内の $\mathbb{P}$-名称となっていることは簡単にいえる．

$b = \pi_{\mathbb{G}}$ とおく．$\mathbb{G}$ に関する解釈の定義から，

$$\begin{aligned} b &= \{\theta_{\mathbb{G}} : \exists p \in \mathbb{G} \text{ s.t. } \langle \theta, p \rangle \in \pi\} \\ &= \{\theta_{\mathbb{G}} : \theta \in Q\} \qquad (\because p \text{ は常に } 1_{\mathbb{G}}) \end{aligned}$$

である．$\mathcal{P}(a) \cap M[\mathbb{G}] \subset b$ を示す：　$c \in \mathcal{P}(a) \cap M[\mathbb{G}]$ を任意に固定する．$c = \sigma_{\mathbb{G}}$ となる $\sigma \in M^{\mathbb{G}}$ を適当にとる．ここで，

$$\theta = \{\langle \chi, p \rangle : \chi \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \chi \in \sigma\}$$

と $\mathbb{P}$-名称をとると，$\theta \in \mathcal{P}(\mathrm{dom}(\tau) \times \mathbb{P})$ であって，定義可能性定理と M での分出公理を使うと $\theta \in M$ が導ける．ゆえに $\theta \in Q$.

最後に $c = \theta_{\mathbb{G}}$ を示せば，$c \in b$ となり，証明終了である：

$[\theta_{\mathbb{G}} \subset c]$　$\theta_{\mathbb{G}} = \{\chi_{\mathbb{G}} : \exists p \in \mathbb{G} \text{ s.t. } \chi \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \chi \in \sigma\}$ である．$\chi_{\mathbb{G}} \in \theta_{\mathbb{G}}$ のとき，$\theta_{\mathbb{G}}$ の構造と真理性定理から，$M[\mathbb{G}] \models \chi \in \sigma$，つまり $\chi_{\mathbb{G}} \in \sigma_{\mathbb{G}} = c$.

$[c \subset \theta_{\mathbb{G}}]$　$c \subset a = \tau_{\mathbb{G}}$ より，c の任意の元はある $\chi \in \mathrm{dom}(\tau)$ をとって $\chi_{\mathbb{G}}$ と表せられる．$\chi_{\mathbb{G}} \in c = \sigma_{\mathbb{G}}$ と真理性定理から，ある $p \in \mathbb{G}$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}} \chi \in \sigma$．したがって $c = \sigma_{\mathbb{G}} \in \theta_{\mathbb{G}}$. □

＊＊＊

「b をとるのは楽だけど，その後の必要な性質を満たすかどうかの証明がちょっと面倒なのよね．ただ，真理性定理や定義可能性定理が適用されているところは単純だから，応用の良いイントロになってくれてると思う．次は置換公理図式を示すわ」

＊＊＊

置換公理（図式）の証明．$M \models \mathrm{ZF}$ とする．$a \in M[\mathbb{G}]$ をとり，主張 $(\forall x \in a \exists y \tilde{\varphi}(x,y))^{M[\mathbb{G}]}$ を仮定する．$(\forall x \in a \exists y \in \mathbf{b} \tilde{\varphi}(x,y))^{M[\mathbb{G}]}$ となる $b \in M[\mathbb{G}]$ のとり方を示せばよい．なお，$\tilde{\varphi}(x,y)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{force}} \cap M$ からとったものである．[*7]

$a = \tau_{\mathbb{G}}$ なる $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ をとる．仮定より，$M[\mathbb{G}] \models \forall x \in \tau \exists y \tilde{\varphi}(x,y)$（★）であるが，真理性定理からある $p \in \mathbb{G}$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}} \forall x \in \tau \exists y \tilde{\varphi}(x,y)$ となることに同値になる．次の性質を満たすように $Q \in M$ を定める：　$p \in \mathbb{P}, \sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ に対して，

$$\exists \theta \in M^{\mathbb{P}} \text{ s.t. } p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma,\theta) \implies Q \cap \{\theta \in M^{\mathbb{P}} : p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma,\theta)\} \neq \emptyset.$$

なお事実として，$p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma,y)$ が M に関して相対化された論理式で記述できることは認めておく．

$p \in \mathbb{P}, \sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ とする．M で反映定理を適用すると，ある $\alpha_{p,\sigma} \in M \cap \mathrm{ON}$ で $(V_{\alpha_{p,\sigma}} \models \exists \theta \in M^{\mathbb{P}}[p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma,\theta)])^M$ となる．ゆえに $(V_{\alpha_{p,\sigma}})^M \cap \{\theta \in M^{\mathbb{P}} : p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma,\theta)\} \neq \emptyset$ が成り立つ．そして，$\alpha = \sup\{\alpha_{p,\sigma} : p \in \mathbb{P}, \sigma \in \mathrm{dom}(\tau)\} \in M \cap \mathrm{ON}$ として，$Q = M^{\mathbb{P}} \cap (V_\alpha)^M$ と定めると，$Q \in M$ であって，さらに上に挙げた性質を満たしている．

＊＊＊

「ところで，$M \models \mathrm{ZFC}$ ならば Skolem 関数を p, σ 毎に考えてその全体を取ってやればいいんだけど，ここでは選択公理が使えないから，安易に Skolem できないの．代わりに順序数全体のクラスの整列性を使って V_ξ の階層を下から調べて，初めて成り立つところを反映定理で探してるってコト．ちなみに今やった Q は (V_α) と $\mathbb{P}$-名称の定義式に対して分出公理を M 内で適用して作ってるわ」

「選択公理があれば便利なんだけど，トワイライトは選択公理を使いたがらないよね」

「いや，まあできることなら避けたいじゃない？　本質が見えなくなりそうな気がするから，選択公理ってちょっと怖いのよ．あまりショートカットされて『ほらよ！』と出されても困りそうで……．そう考えると選択公理ってなんだかディスコード[*8]みたい」

「アハハ，フラッターシャイが聞いたら怒りそうだなぁ」

＊＊＊

……さて，$\pi = Q \times 1_{\mathbb{P}}, b = \pi_{\mathbb{G}} = \{\theta_{\mathbb{G}} : \theta \in Q\}$ とおく．$(\forall x \in a \exists y \in b \tilde{\varphi}(x,y))^{M[\mathbb{G}]}$ を示す：　$M[\mathbb{G}]$ で $x \in a (= \tau_{\mathbb{G}})$ を任意にとり，$x = \sigma_{\mathbb{G}}$ となる $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ をとる．仮定より $(\exists y \tilde{\varphi}(\sigma,y))^{M[\mathbb{G}]}$ であるので，ある $\theta \in M^{\mathbb{P}}$ で $M[\mathbb{G}] \models \tilde{\varphi}(\sigma,\theta)$ となる．真理性定理

[*7] 本来の主張だと集合論の論理式 $\varphi(x,y)$ で考えなければならないが，$\forall x \exists y \varphi(x,y)$ の $M[\mathbb{G}]$ での解釈は $\forall x \in M^{\mathbb{P}} \exists y \in M^{\mathbb{P}} \varphi^{M[\mathbb{G}]}(x,y)$ という論理式を考えることに同じである．ゆえに最初から M 内の強制言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{force}} \cap M$ の中の論理式 $\tilde{\varphi}(x,y)$ で考えても同じことである．

[*8] かつてエクエストリアを混沌の渦に陥れようとした，名前の通り混沌を司る存在．種族的にはドラコネクウスと呼ばれる．自在に魔法や時空を操って，世の中をめちゃくちゃにできるほどの力をもつ．今は悪さをしなくなり，たまに悪戯やからかったりもするが，誰かを不幸にするようなことはやめた．最近はフラッターシャイとお茶会をする日課を楽しみにしている．

より，ある $p \in \mathbb{G}$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma, \theta)$ となる．この p, σ に対して，$p \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{\varphi}(\sigma, \theta)$ となる $\theta \in Q$ をとれる．$y = \theta_{\mathbb{G}}$ とすれば，$M[\mathbb{G}]$ で $y \in b$ かつ $\tilde{\varphi}(x, y)$ が成立する．□

選択公理の証明. $M \models$ ZFC とする．既に $M[\mathbb{G}] \models$ ZF が示されているとする．$a \in M[\mathbb{G}]$ を 1 つ任意にとる．$\tau \in M^{\mathbb{P}}$ で $a = \tau_{\mathbb{G}}$ となるものを適当にとる．$M[\mathbb{G}]$ において a が整列されることを示せばよい．[*9]

M で選択公理が成り立っているので，$\mathrm{dom}(\tau) = \{\sigma^{\xi} : \xi < \alpha\}$ と $\alpha \in M \cap \mathrm{ON}$ で枚挙できる．ここで，

$$\dot{f} = \{\langle \mathrm{op}(\check{\xi}, \sigma^{\xi}), 1_{\mathbb{P}} \rangle : \xi < \alpha\} (\in M)$$

と $\mathbb{P}$-名称を定義する．そして $f = \dot{f}_{\mathbb{G}}$ とする．このとき，$1_{\mathbb{P}} \in \mathbb{G}$ より，$f = \{\langle \xi, \sigma^{\xi}_{\mathbb{G}} \rangle : \xi < \alpha\}$ となって，f は α を定義とする $M[\mathbb{G}]$ での関数となる．また，$a \subset \mathrm{ran}(f)$ である．$M[\mathbb{G}]$ で a 上の二項関係 $<_f$ を次のように定める：

$$x <_f y \qquad \text{iff} \qquad \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\} < \min\{\mu < \alpha : f(\mu) = y\}.$$

このとき $<_f$ は a 上の整列順序になっている：　順序数の全順序性から $<_f$ が全順序であることは直ちにわかる．残りの整礎性 (well-foundedness)[*10]を示す．$X \subset a \cap M[\mathbb{G}]$ を任意にとる．$X' = \{\min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\} : x \in X\} \in \mathcal{P}(\alpha) \cap M[\mathbb{G}]$ に対し，順序数上の順序に関する性質を $M[\mathbb{G}]$ で適用する[*11]と，$\min X' \in \alpha \cap M[\mathbb{G}]$ となる．そこで $f(\min X') = x$ となる $x \in X$ をとると，x 以外のすべての X の元 y に対して $\min X' < \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = y\}$ となるから，$x <_f y$．したがって $x = \min X$．ゆえに整礎性が成り立つ．□

＊＊＊

かなり矢継ぎ早に説明したために，トワイライトはほとんど息をきらしかけていた．脳の足りない酸素を補給しようと鼻孔が若干膨らんでいる．

黒板にこれ以上ないほど詰め込まれた記号と文字が，しかし整然と $M[\mathbb{G}]$ の諸性質を語りかけている．トワイライトの綺麗な筆跡も相まって，レインボーダッシュには消すのがひどく勿体無いように思えた．

黒板の前にじっと立っていたトワイライトはおもむろに黒板消しを浮遊魔法で操り，特にこれといった感慨もないかのようにさっさと自分の書いた証明や首長を消していった．レインボーダッシュの眉が少し垂れ下がったのには誰も気付いていない．ピンキーパイは暢気にお菓子をぼりぼりむさぼっている．

消し終わって，少し逡巡した後，トワイライトはすまなそうな顔で言った．

「今回，真理性と定義可能性の詳しい証明まではできなさそう．さっきの強制法の魔法で思った以上にくたくたになっちゃった」

「そりゃあ，あれだけ細かいのを作ってたらねぇ……」

「あんなの，作るのにどれだけ時間かけたの？」

「……んーと」

[*9] すべての集合の上に整列順序が存在するという整列可能定理．これは選択公理と同値である

[*10] A 上の二項関係 $<$ が整礎とは次の意味である：　任意の部分クラス $X \subset A$ は極小元をもつ．前順序であれば X の極小元は X の最小元となることに注意せよ．

[*11] $M[\mathbb{G}] \models$ ZF であるので，順序数に関する多くの絶対的な性質が $M[\mathbb{G}]$ でも成り立っている．

トワイライトの眼が何もない宙に向かう．ひきつった笑みで友達にはなにもかもわかってしまった．

「何徹したのかな？かな？」

ピンキーパイの底抜けに明るい声が逆に不穏な空気を増幅させていた．

「……3 デス」

別に学術研究のためではなく，単に趣味の一環として集まっているだけではあったが，たとえ糾弾をするつもりがなくとも，ピンキーパイは何かとトワイライトを焦らせる言動が多い．そうして今度はトワイライトが背筋に悪寒を走らせる番になった．レインボーダッシュはやれやれとかぶりを振って多少呆れるだけだ．一方ピンキーパイはニコニコして彼女の方を見つめたまま動かない．数学魔法の作成に力を入れ過ぎたのを笑顔の内に咎められているようで，気が気でない．いつもはいい意味で驚かせてくれる彼女が，集合論の場では心臓に悪いサプライズをねちねちと贈りつけてくるという印象をもってしまい，トワイライトはゼミの場に限って，恐々と彼女の顔色をうかがうのが無意識の日課になっている．

「とりあえず，今回はこれくらいにしマス．次からは強制関係に関してさらに深く掘り下げたいと思ってマス．それから主定理の証明をして，余力があれば今さっき魔法で実演した $\neg$CH のモデルを強制する理論を解説していくつもりデス」

ぎこちなく締めくくった彼女にピンキーパイの愛嬌深い笑みが未だ不気味に振りかかっている．

「ちなみに強制関係の掘り下げってどんなの？」

口調は特に変わりない．ピンキーの普段通りの調子の声を聞き，なぜだかかえって勇気づけられる．なんということはなく，トワイライトが無駄に心配性なだけであった．

「最初の方で言ってた V での形式的展開の話ね．最初に原始論理式 (atomic formula) に対して，以下の定義を与えるわ」

$$
\begin{aligned}
&p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \sigma = \tau \quad \text{iff} \quad \forall\langle\pi, r\rangle \in \sigma[r \leq p \to r \Vdash^*_{\mathbb{P}} \pi \in \tau] \land \forall\langle\pi, r\rangle \in \tau[r \leq p \to r \Vdash^*_{\mathbb{P}} \pi \in \sigma],\\
&p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \pi \in \tau \quad \text{iff} \quad \{q \leq p : \exists\langle\sigma, r\rangle \in \tau \text{ s.t. } q \leq r \land q \Vdash^*_{\mathbb{P}} \pi = \sigma\} \text{ が } p \text{ の下で稠密になっている.}
\end{aligned}
$$

「これは再帰的な定義になっているのだけれど，どのような関係を考えた上での再帰なのかを考えるのが少し大変ね．ちなみに，真理性や定義可能性を仮定して今回扱った強制関係 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ を調べると，上の 2 つと同じ形の強制関係の式が得られるわ．φ を変数が名称になっている原始論理式であるとすると，結果的には

$$
\begin{aligned}
p \in \mathbb{G} \land (p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi) &\implies M[\mathbb{G}] \models \varphi,\\
M[\mathbb{G}] \models \varphi &\implies \exists p \in \mathbb{G} \text{ s.t. } (p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi)^M
\end{aligned}
$$

ということが示せる．これにより，$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ と $(p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi)^M$ が同値になるの．真理性定理は上の強制関係と $M[\mathbb{G}]$ の行き来の関係からいえて，定義可能性は今の同値性と $\Vdash^*_{\mathbb{P}}$ の直接的定義から従って……」

「一件落着ってワケ」

トワイライトは呼応したレインボーダッシュに微笑んだ．

「ええ．で，他の形の論理式に関しては帰納的に自然な定義を与えることができて，そして帰納的に同じ主張が成り立つことを確かめられるので，本質はやっぱり最初の原始論理式のところかしらね」

「さっき完備ブール代数での強制拡大の話があったけど，φ の**ブール値**を $p \Vdash \varphi$ となる p のsup（上限）として定義すると，論理式の組み合わせについてかなり綺麗なブール値の関係が成り立つよ．これ自体は簡単だからトワイライトの宿題にしとこう！」

「あと，圏論の言葉で強制法を説明することもできるんだよ〜．アタシは圏とかよく知らないんだけど，**アップルジャック**[12]あたりに聞けば参考になるかもね！」

薄暗かった部屋が途端に平穏な明るさを取り戻す．幼い助手の**スパイク**が扉を開けて，彼らの知己らの来訪を告げる．儀式が済めばそぞろな気分や疑懼（ぎく）も去り，平穏な日常がトワイライトへ再び還る．

木立を吹き抜ける風の清籟（せいらい）が肌をなぜる．爽々とした感覚に昼下がりのピクニックへの期待をいっそうと膨らませた．トワイライト，ピンキーパイ，レインボーダッシュの三頭は蹄をかろやかに響かせながら，親友たちの元へと速歩（はやあし）ぎみに向かっていく．

たまゆら，紫電が彼らの間を縫った．ピンキーとレインボーダッシュはそれに気付き，顔を見合わせる．トワイライトはそんな彼らを気にも留めずに先を行く．実際は紫電というよりも，糸のようにか細い紫煙が宙にふわりと漂い，そしてたちまちに霧消したのだった．ふたりは先ほどの魔法で見た，彼女の目に宿った妖しい光を思い出した．

「数学に闇の魔法を使うって，まさかね……」

「だよね〜」

「はやくしないとピクニックの時間が無くなっちゃうわよ！」

若き友情のプリンセスがふたりを急かす．たった一瞬の魔法の残滓（ざんし）に，微かな不穏の兆しを覚えるふたりだったが，すぐに振り払い，元気よく外の世界へと跳び出していった．

（次号に続く？）

[12] トワイライトの親友．友情のエレメントは**誠実**を司る．ポニーヴィルで巨大なリンゴ農園を営んでおり，日々の仕事の賜物か運動神経はレインボーダッシュにも負けず劣らずである．生粋のカントリーガールであるため，訛りが強い．

参考文献

[1] Kenneth Kunen, *Set Theory*, 2011, College Publications

[2] Thomas Jech, *Set Theory 3rd Edition*, 2000, Springer-Verlag

[3] 田中一之, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学』, 2007, 東京大学出版会

第 2 章

2^n 元数の帰納極限である無限次元代数の Haskell による実装

淡中 圏

実数、複素数、四元数、八元数、十六元数、と無限に続く、任意の自然数 n に対しての 2^n 元数の計算ができる抽象データ型を、Haskell で定義する。

2.1 実数、複素数、四元数、八元数、十六元数……

プログラミングにおける数学的な練習問題として、「複素数を実装する」と言うものがある（例：[1]）。

複素数とは、$a + bi \quad (a, b$ は実数$)$ の形で表される数で、$i^2 = -1$ となっている。任意の形の複素数の積は、これから分配法則で計算できる。

ベクトルで現すとこの計算は次のようになる。

$$(a, b) \times (c, d) = (ab - cd, ad + bd)$$

さて、複素数は 2 次元の空間の回転を掛け算で表現できるので、たいそう便利だが、空間の回転も表せたらもっと便利だろう、と考えるのが人情というものである。

そこで登場するのが**四元数**だ。これは $a + bi + cj + dk$ の形で表される数で、$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ で、$ji = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$ となっている。任意の形の四元数の積は、これからやはり分配法則で計算できる。

見ての通り、この積は可換ではない。

平面の回転は可換だ。30 度回転と 60 度回転をどういう順番でしようが、結果は 90 度回転である。

それに対して空間の回転が可換でないことは、上を向いてから（左右軸で９０度回転）首を右に捻った（上下軸で９０度回転）したときと、右を向いてから（上下軸で９０度回転）肩に顔の右側を押し付けるように首を曲げた（左右軸で９０度回転）ときの、結果が違うことからわかるでろう（この部分を読んだ人の多くが首を痛めたことだろうと思う。書きながら私も首を捻ったので許して欲しい）。

それが四元数の積の非可換性に現れている。

これは姿勢制御などによく使われていて、ロケットのシミュレーションに使われているのを見たことがある。[3] また、可愛い 3D キャラクターを音楽に合わせて踊らせることができる MikuMikuDance の関節の動きも内部的には四元数で表現されているという。[4]

であるので、これをプログラミングで表現するのは、非常に意味があるのだが、この時点でだんだん面倒臭くなる。

四元数の計算をベクトルで現すと次のようになる。

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, d_1) \times (a_2, b_2, c_2, d_3) = (&a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\\ &a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\\ &a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2,\\ &a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_1)\end{aligned}$$

法則性も分かり難いし、これを間違えずにコーディングするのは大変である。

複素数、四元数と来たら、**八元数**もあるはずだ、と考えるのがやはり人情である。そして、ちゃんとあるところが素晴らしい。これは $a + bi + cj + dk + el + fm + gn + ho$ と表される数である。ちなみに私は、虚数単位を現す文字が octonion の頭文字の o で終わることと、a から o までの文字を全て使っていることに無闇に感動したものだ。

本当は、ここで計算法則を説明するはずだが、やらない。死ぬほど面倒なのだ。先ほどの四元数の計算法則が、私の持続力の限界だと言っていい。知りたい人は、Web 上で調べれば情報は出てくるであろう。そしてそれをここに書かなかった私の判断の正しさも納得してくれると信じている。

とりあえず、八元数においては結合則、つまり、

$$(ab)c = a(bc)$$

が成り立たない、ということだけ書いておこう。

八元数の応用については私は知らない。

この八元数をプログラミングした、という話も Web 上で調べれば出てくる。

マゾなのか？

私はマゾではないので、もう少しエレガントな方法を探す。

それが**ケイリー・ディクソン構成**である。

これは実数から複素数、複素数から四元数、四元数から八元数、と構成していく方法を抽象化したもので、ある数の体系に、和と差と積と**共軛**が定義されているときに、その数の組み (a, b) の積を

$$(p, q)(r, s) = (pr - s^*q, sp + qr^*)$$

と定義するものである。実数の共軛を自分自身とし、複素数や四元数の共軛を実数部分以外の係数の符号を反転することだとすると、これにより実数から複素数、複素数から四元数、四元数から八元数が構成できる。

そして八元数から十六元数も構成できる。この十六元数は、零因子、すなわち 0 でない数と 0 でない数の積が 0 になる場合が現れる。

$|x| := \sqrt{xx^*}$ としたとき、八元数までは $|ab| = |a||b|$ が成り立っているが、上記から十六元数ではこの性質は失われる。

これをどのように、プログラミングするか。

これはつまり、積を下のレベルの積や和や共軛から、再帰的に定義しているのだから、再帰的データ構造で定義するのが自然だ。

そうすればベクトルとして定義しようとしたときの、あの煩わしい式や計算表の山から解放され、問題はデータや関数の再帰的定義に関するちょっとした頭の体操になる。

つまりこれはプログラミングにおける木構造の良い練習問題だと言いたいのだ。

関数型プログラミング言語の入門書をこれから書こうという方にはぜひ採用してもらいたいものだ。

というわけで、Haskell で軽く書いてみよう。もっと色々な工夫ができるような気がするが、むしろ必要最低限のプログラムにしてみた。

ちなみに、木構造で実装する、という部分のエレガントさに自信は持っているが、プログラムがエレガントな自信は全くない。ご批評を賜りたい。

ソースコードは github の tannakaken/CaykeyDickson[*1]に置いてあるので、ブラウザで見てもいいし、できればぜひ clone して遊んでみてください。

ここで定義された代数構造は、実数、複素数、四元数、八元数、十六元数、三十二元数……と無限に続く 2^n 元数の系列の帰納極限として構成される、実数上無限次元の代数である。

この代数構造に特に決まった名前はないと思うが、私が以前この代数構造を計算できる電卓を Android アプリとして、リリースした時は、「Infinitenion」と名付けた。[*2] Quarternion、Octonion という名前の系列で考えたのだ。Web 上では「Nion」と読んでいる人もいた。[*3] 同じ発想なのだろう。できれば 2^n でひとかたまりである、という情報を失わない、いい名前が欲しいものだ。

2.2 Haskell による実装

では実装を始めよう。Haskell については、[2] を参考にしている。実際良い本なので、みんな読んでほしい。

```
module CayleyDickson(r, i) where

data CayleyDickson = Node Float | Branch CayleyDickson CayleyDickson Integer
  deriving (Eq)
```

公開する関数は、実数をこの数の体系に取り込む関数 r と、n 番目の虚数単位を作る i だけである。

データ構造は、実数そのものか、実部と虚部を持つ二分木である。型クラス Eq のインスタンス宣言を自動導出することにより、木の形が等しく、ノードの値が全て等しい時に、二つのデータは等しい、と定義される。

ただしこの木は高さの情報を持っている。

---

*1 https://github.com/tannakaken/CayleyDickson

*2 https://play.google.com/store/apps/details?id=jp.tannakaken.infinitenion&hl=ja からインストールできる。「無限次元超複素数電卓 Infinitenion」検索してもでる。Android をお持ちの方は遊んでくれると嬉しい。iPhone 版も近いうちに出したい。

*3 https://github.com/lmj/cayley-dickson。このプロジェクトでもケイリー・ディクソン構成で、無限次元の代数を構成しているようだ。

例えば、3.14 は

```
Node 3.14
```

と表される。

また、複素数 $1.0 + 2.0i$ は

```
Branch (Node 1.0) (Node 2.0) 1
```

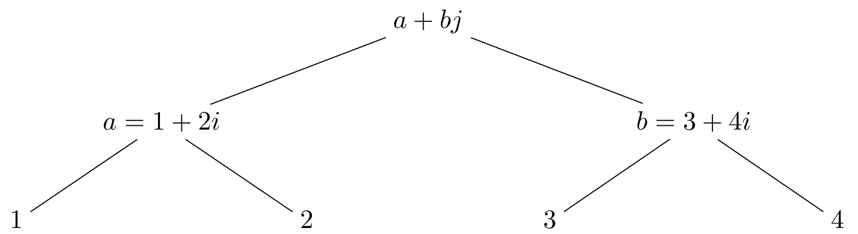
と表される。

ここまでは難しくない。ここからが本番だ。

四元数 $1.0 + 2.0i + 3.0j + 4.0k$ は

```
Branch (Branch (Node 1.0) (Node 2.0) 1) (Branch (Node 3.0) (Node 4.0)) 2
```

と表される。これを木として描くと次のようになる。

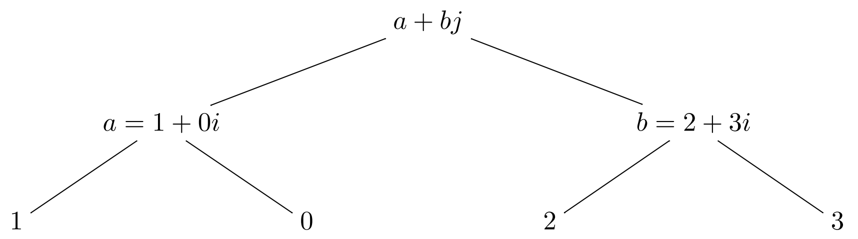


これを見れば高さの情報を木が含んでいる方が便利である理由がわかる。高さが 1 の分岐の虚数単位は i だが、高さが 2 の分岐の虚数単位は j になっている。このように、高さによって、虚数単位が変わる。

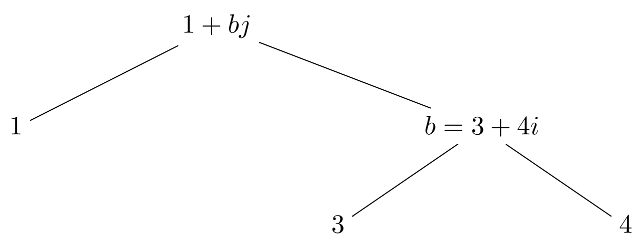
では次のような数はどう表せばいいだろう。

$$1 + 2j + 3k$$

実はこの数には複数の表し方がある。



と表してもいいし、



と表してもいい。

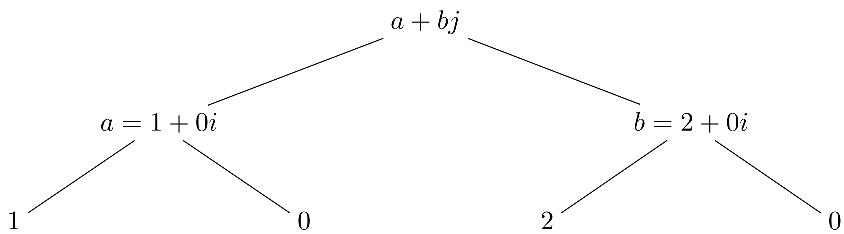
同じデータを表す表現が複数あるのは困る。分かりにくい、というのも理由であるし、形と値で等値性が表現できないんだったら。せっかく型クラス Eq のインスタンス宣言を自動導出したのを即刻やめて、独自に等値性を表現し直さなくてはいけなくなって、面倒だ。

なので、できるだけ簡約した後者の表現だけを採用したい。つまり、虚部が 0 の場合は、虚部を落としてもいい、としたい。

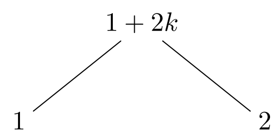
しかしすると、次の数はどうなるのか。

$$1 + 2j$$

簡約を全くしない木で表現すると、次になる。



これを「虚部が 0 なら虚部を落とす」というルールで簡約すると、次の形になる。



もし木の形しか情報がないと、これは $1 + 2i$ と区別できない。簡約のルールを複雑化して「木の形をみながら簡約していいか判断する」という選択肢もある。しかし、簡約ルールが全体を見渡すのは再帰と相性が良くないように思える。そこで、できるだけ上記の簡単な簡約ルールを押し通せるように、木が自分の高さを覚える、つまり今自分が右側の枝に掛けている虚数単位を覚えているようにした。

そして、データの構成子をモジュール外に公開せず、簡約ずみのデータを返す関数のみを公開することにより、Eq による等値性が正しい結果を返すことを保証する。

そこで、次はデータの形を簡約して一意化する関数を定義しよう。

```haskell
uniformization :: CayleyDickson -> CayleyDickson
uniformization (Node r) = Node r
uniformization (Branch real imag h) =
  case imag of
    Node 0 -> real
    _ -> Branch real imag h
```

見ての通り、虚部が 0 なら落としている。再帰関数にして、枝も簡約するか悩むが、データを構成する時に、必ずすでに枝は簡約している、という仮定の下、再帰的な簡約はしなかった。しっかりと確認しなくてはいけない部分である。

高さを返す関数も定義しておこう。

```
height :: CayleyDickson -> Integer
height (Node _) = 0
height (Branch real imag h)  = h
```

r は簡単だ。

```
r :: Float -> CayleyDickson
r = Node
```

ここで、n 番目の虚数単位を返す関数を作る。

```
i :: Integer -> CayleyDickson
i 0 = Node 1.0
i 1 = Branch (Node 0.0) (Node 1.0) 1
i n =
  let
    (l,r) =
      let
        logAndRemainder logarithm powerOfTwo =
          let newPower = 2 * powerOfTwo
          in
            if n >= newPower
              then logAndRemainder (logarithm + 1) newPower
              else (logarithm, n - powerOfTwo)
      in
        logAndRemainder 0 1
    imag = i r
  in
    Branch (Node 0.0) imag (l + 1)
```

0 と 1 を特別例として、2 から 3 は高さ 2、4 から 7 は高さ 3、というパターンから、k を $2^k \leq n$ となる最大の自然数とした時の、$k+1$ で高さが分かる（証明してみよう）。

そして、その剰余で再帰して作った数を虚部に持てばいいことも、八元数あたりで実際に木を書いて見れば分かる。白い紙を用意してやってみよう。

また、それによって、この方法で作られたものが、すでに簡約済みであることも得心がゆくはずだ。

さて、これを ghci で試すに当たって、データを分かりやすく文字列にする方法が欲しい。

そこで、このデータ型を Show のインスタンスにしよう。

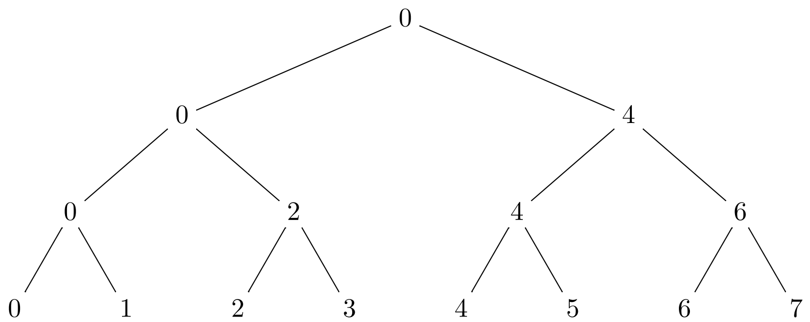
```
instance Show CayleyDickson where
  show (Node r) = show r
  show cayleyDickson =
    let
      showImaginary n (Node r) =
        if r == 0.0
          then ""
          else if n == 0
            then show r
            else show r ++ "i_" ++ show n
```

```
    showImaginary n (Branch real imag h) =
      let
        low = h - 1
      in
        let
          left = showImaginary n real
        in
          if left == ""
            then showImaginary (n + 2^low) imag
            else left ++ "␣+␣" ++ showImaginary (n + 2^low) imag
  in
    showImaginary 0 cayleyDickson
```

n 番目の虚数単位を i_n として表示する。

虚数単位に係数を掛けたものを、+ で繋いでいるだけなので、係数が負の数だと、少し違和感がある。まだまだ工夫をする余地がある。

何番目の虚数単位であるかを、判断する基準は、高さが h の時に右に分岐すると、虚数単位の番号が 2^{h-1} だけ足される、ということを観察すれば分かる。これも証明すると良い。



さて、ここからようやく演算が定義できる。

まずは実部と虚部を返す関数を用意しておこう。

```
realPart :: CayleyDickson -> CayleyDickson
realPart (Node r) = (Node r)
realPart (Branch r _ _) = r

imagPart :: CayleyDickson -> CayleyDickson
imagPart (Node r) = (Node 0.0)
imagPart (Branch _ l _) = l
```

こんなものでも、型の実装の詳細に触れなくて良くなって、結構便利だ。

まずは、先に全体の符号を反転する関数を用意する。共軛を定義する前に必要だ。

```
negate :: CayleyDickson -> CayleyDickson
negate (Node r) = Node (- r)
negate (Branch l r h) = Branch (CayleyDickson.negate l)
                               (CayleyDickson.negate r)
                               h
```

特になんの問題もないと思う。

そして、共軛は実部を共軛し、虚部を符号反転すると考えられる。ただし、実数の共軛は自分自身だ。

```
conjugate :: CayleyDickson -> CayleyDickson
conjugate (Node r) = (Node r)
conjugate (Branch l r h) = Branch (conjugate l)
                                  (CayleyDickson.negate r)
                                  h
```

目標としては型クラス Num のインスタンス化がしたいのだが、そのためには、あまり良い型クラス設計とは言えないが絶対値関数 abs を定義する必要がある。

十六元数になってしまうと絶対値にどんな意味があるのか不明確になってしまうが、定義だけなら簡単だ。

```
squareSum :: CayleyDickson -> Float
squareSum (Node r) = r * r
squareSum (Branch l r _) = (squareSum l) + (squareSum r)

absoluteValue :: CayleyDickson -> Float
absoluteValue = sqrt . squareSum
```

では、一気に Num のインスタンス宣言を書いてしまおう。

```
instance Num CayleyDickson where
  (Node l) + (Node r) = Node (l + r)
  l + r =
    let
      hl = height l
      hr = height r
      d = hl - hr
    in
      if d == 0 then uniformization $ Branch (realPart l + realPart r)
                                             (imagPart l + imagPart r)
                                             hl
      else if d > 0 then uniformization $ Branch (realPart l + r)
                                                 (imagPart l)
                                                 hl
      else uniformization $ Branch (l + realPart r)
                                   (imagPart r)
                                   hr

  l - r = l + CayleyDickson.negate r

  (Node l) * (Node r) = Node (l * r)
  l * r =
    let
      hl = height l
      hr = height r
      d = hl - hr
```

```
  in
    if d == 0
      then
        let
          p = realPart l
          q = imagPart l
          s = realPart r
          u = imagPart r
        in
          uniformization $
            Branch ((p * s) - (conjugate u * q))
                   ((u * p) + (q * conjugate s))
                   hl
    else if d > 0 then uniformization $ Branch (realPart l * r)
                                               (imagPart l * conjugate r)
                                               hl
    else uniformization $ Branch (l * realPart r)
                                 (imagPart r  * l)
                                 hr

abs = Node . absoluteValue

fromInteger = Node . fromInteger

signum _ = Node 0
```

特に問題はないのではなかろうか。高さを比べながら、計算を実部と虚部に再帰的に振り分けている。そして帰ってきた値を木に構築する時に、簡約している。

気をつけるべきなのは、やはり掛け算だ。高さが同じ時は、ケイリー・ディクソン構成そのままだ。四元数をベクトルで定義するのに比べても式が簡単で助かる。しかし、高さが違う時の掛け算に罠があって、足し算と同じように単純に実部と虚部に振り分けると間違える（実際間違えた)。

もう一度ケイリー・ディクソン構成の式を書くと、

$$(p,q)(r,s) = (pr - s^*q, sp + qr^*)$$

であるが、これで左右の高さが違う時、つまりどちらかの虚部が 0 の時の式は、

$$(p,0)(r,s) = (pr, sp)$$

$$(p,q)(r,0) = (pr, qe^*)$$

になる。

他には、符号を返す signum とかなぜ定義しなくてはいけないかまったくわからん関数を、適当に定義したりしているだけで、特に説明の必要はないと思う。

もう一度、書くと、github の tannakaken/CayleyDickson からダウンロードして ghci でロードしたら、

```
i 100 * i 100
```

で 100 番目の虚数単位の自乗が -1.0 になることを確認したり、

```
i 1 * i 2 - i 2 * i 1
```

が 0.0 にならないことで、四元数の非可換性を確認したり、

```
(i 1 * i 3) * i 5 - i 1 * (i 3 * i 5)
```

が 0.0 にならないことで、八元数の非結合性を確認したり、

```
(i 3 + i 10) * (i 6 - i 15)
```

が 0.0 になることで、十六元数に零因子が存在することを確認したりしよう。

Web 上には 128 元数には $x^n = 0$ になるような x が存在する、などという出所不明のまことしやかな情報が流れていたりするが、[*4] それが嘘であることも、色々遊んでいると分かるかもしれない。

参考文献

[1] ジェラルド・ジェイ・サスマン/ハロルド・エイブルソン/ジュリー・サスマン著, 和田栄一訳, 計算機プログラムの構造と解釈,`http://sicp.iijlab.net/fulltext/`, 2017/12/24 access.

[2] Miran Lopovača 著, 田中英行/村主崇行訳, すごい Haskell たのしく遊ぼう!, オーム社, 2012.

[3] 中久喜健司著, 科学技術計算のための Python 入門, 技術評論社, 2016.

[4] ラジ P/極北 P/ポンポコ P/かんな P 著, MikuMikuDance で P さんと呼ばれる本, 翔泳社, 2010.

[5] Cayley-Dickson construction(Wikipedia),`https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Dickson_contruction`, 2017/12/24 access.

[*4] 例:`https://ameblo.jp/darainao/entry-11077113460.html`

第 3 章

コヒーレンス空間

木村 允哉

ここでは形式体系の意味論としてよく議論されるコヒーレンス空間とその上の安定関数について書く。コヒーレンス空間と安定関数からなる圏がカルテシアン閉圏であることに証明を与える。

3.1 ちょっとした背景 & 準備

言葉って難しいですよね。伝えたいことがあって誰かに何かを喋っても、意図が正しく伝わることがどれほどあるでしょう。でも毎日の生活の中では皆が皆そんなこと意識してるわけではないと思います。その困難さを理解するのはいつだって手遅れになった後ですから。悲しい結末にならないように、幸せの種が芽吹くように、僕たちは言葉を尽くして想いを伝え合うのでしょう。

さて、それはそれとして曖昧さが少ない言葉というのが欲しいものです。これをしてくれあれをしてくれというお願いに曖昧さがあったら共同作業は難しいものになるし、かといってその一つ一つに全身全霊で言葉を尽くすというのも怠い話です。

曖昧さを出来るだけ排除した言葉の体系、言語が欲しい。それによって紡がれる文章で命令を簡潔に伝えたい。出来れば複雑な命令を意味する文章も書けるものであればよい。これらが所謂プログラミング言語というやつに求められるものの一部だと僕は思っています (他にもいっぱいあるでしょうけれど) 。

そうした目的で作られた言語はどういう性質を持っているだろう、という疑問は自然なものです。だって本当に曖昧じゃないかとか、本当に意図したように動くのかとか分からなければ使うのは危なそうです。また一般的に何か道具の性質を知ることはその道具をより上手に使いこなすための手がかりにもなるものです。

このプログラムは停止するだろうか。この言語ではどんなプログラムが書けるだろう、あるいは書けないだろう。この概念はどのように扱えば分かりやすいだろう。

これを数学を使って考えるというのが計算論やら型理論やら、巷で耳にする理論で扱われていることです。

これら言語のことを数学では一般に「形式体系」と呼びます。英語だと formal system です。有名な奴だと λ 計算の体系なんかがありますね。今回この節で注目するのはその中でも「型」というやつを導入している形式体系です。正確な定義はここではしませんが、このような体系で作られる文章 (項と呼びます) は概ね次のような形をしています。

- 型 A を持つ変数 x
- 型 B であってかつ型 A の変数 x を含む項 t について、型 $A \longrightarrow B$ を持つ項 $\lambda x.t$ [*1]
- 型 $A \longrightarrow B$ を持つ項 t と型 A を持つ項 t' に対して型 B を持つ項 $(t\ t')$

形式体系で出来た項にどのような意味を持たせればいいでしょうか。それを定義することを「意味論を定める」と言います。意味論にも色々流儀がありますが、今回は形式体系の文章に対して数学的な集合や関数を割り当てるというスタイルを考えましょう。[*2]

例えば型 A に対して $\overline{A}$ という集合を対応させ、その上で型 $A \longrightarrow A$ の項 $\lambda x.x$ に対して関数 $\overline{\lambda x.x} : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ を

$$\overline{\lambda x.x}\,(a) = a$$

と対応させたりすることになります。

では型 $A \longrightarrow B$ に対応する集合は何でしょうか？たぶんそれは集合 $\overline{A}$ から集合 $\overline{B}$ の関数全体 (またはその一部) の集合を指してほしいと思うのが自然です。ではそのような集合はあるでしょうか？

数学で扱われる関数 (写像) が集合で表されることをご存知の方は「ある」と分かるでしょう。そうすれば所謂高階関数と呼ばれる奴ら、関数を引数や戻り値にもつ関数たちについてどんな風に表されるかが分かってきます。

例えば型 $A \longrightarrow (B \longrightarrow B)$ を持つ項 $\lambda x.\lambda y.y$ は

$$\overline{\lambda x.\lambda y.y}\,(a) = \left\{(b,b) \in \overline{B} \times \overline{B} \,\middle|\, b \in \overline{B}\right\}$$

となるわけです。右辺は $\overline{B}$ 上の恒等関数 $1_{\overline{B}}(b) = b$ を集合として表したものです。これは $\overline{B}$ から $\overline{B}$ への関数全体からなる集合の元となります。

では形式体系の意味論に特殊な集合、関数を割り当てた場合はどうでしょうか？特殊な集合 S, T と、S から T への特殊な関数全体からなる集合を $S \Rightarrow T$ としたとき $S \Rightarrow T$ は再び特殊な集合になるでしょうか。もし特殊な集合となるならば、型 $A \longrightarrow B$ に対応させる集合として $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ を選べそうです。

例えば特殊な集合としてベクトル空間、特殊な写像として線型写像を取った場合、線型写像全体からなる集合 $V \Rightarrow W$ はベクトル空間になるでしょうか。順序集合と順序保存写像では？群と群準同型では？環と環準同型では？

また論理的な要請もあります。Curry-Howard 同型対応と呼ばれるものが知られていて、これは簡単に言うと計算と型の為の形式体系というものは数理論理学で扱われる論理体系と殆ど同じものだよ、ということです。それによれば λ 計算における型 A, B のペアの型 $A \times B$ は、論理における命題 A, B の連言「A かつ B」に対応していると言われています。このとき型 $A \times B$ の項 t は、論理の連言「A かつ B」の証明に対応しています。

[*1] 自由/束縛変数とかその辺の細かいところはここではやりません。

[*2] 正確には閉じた項なりなんなりという概念も必要です。

論理体系では「A かつ B ならば C」が示された場合、自然と命題 A から「B ならば C」が示されます。つまり「A ならば (B ならば C)」です。そしてその逆もしかりです。後者が示された場合、自然と前者が示されます。

形式体系の言葉にすれば、型 $A \times B \longrightarrow C$ の項と $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ の項を自然に対応させられるということになります。その意味論は $\overline{A \times B} \Rightarrow \overline{C}$ の元と $\overline{A} \Rightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{C}\right)$ の元とを自然に対応させる全単射となります[*3]。

ではペアの型 $A \times B$ はどんな集合に割り当てましょう？そのとき上のような対応はありますか？ベクトル空間と線型写像の時は？順序集合、群、環ではどうでしょう？

もしこのような自然な対応が定義できないのであればそもそもそれは意味論としてふさわしいものでしょうか？

ふさわしくない、と言えるかは分かりませんが少なくともこの性質は形式体系と相性が良さそうだということは言えそうです[*4]。この性質のことをカルテシアン閉性 (Cartesian closedness) と呼びます。カルテシアン閉性を正確に定義しましょう。

Definition 3.1.1. 圏 $\mathcal{C}$ がカルテシアン閉圏 (cartesian closed category) である (カルテシアン閉性を持つ) とは、

- $\mathcal{C}$ が有限積を持ち
- 任意の対象 $C \in \mathcal{C}$ について $C \times - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が右随伴を持つことである。

$C \times -$ の右随伴はしばしば「冪」と呼ばれる。

上に書いたことをこの定義に沿ってキチンと書き直すとすれば、

- 形式体系から圏 $\mathcal{C}$ への意味論を考える。このとき型は $\mathcal{C}$ の対象へ、項は $\mathcal{C}$ の射へ対応させる。
- $A \longrightarrow B$ の形の型を対応させるために、対象 S から対象 T への射の集合 (またはそれに準ずるもの)$S \Rightarrow T$ が $\mathcal{C}$ の対象になるかをみる。ベクトル空間や順序集合、群、環の圏ではそうなるか？
- このとき型 $A \times B \longrightarrow C$ の項から型 $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ の項への対応が欲しい。それは意味論となる圏で随伴 $\mathcal{C}(C \times D, E) \simeq \mathcal{C}(D, C \Rightarrow E)$ が成り立っているということである。即ち $\mathcal{C}$ がカルテシアン閉圏であるかどうかが大事。
- 例に挙げた圏はそれぞれカルテシアン閉圏だろうか？

等々となります。

この記事のお話は、形式体系の意味論としてしばしば導入されるコヒーレンス空間と安定関数について、そのカルテシアン閉性を見てみようというものです。

[*3] この対応は自然同型と呼ばれますが、この文章中で使っている「自然」という言葉とは関係ないです。

[*4] 実の所、形式体系によってはこの性質 (カルテシアン閉性) を持たない意味論を作ることもあるので全くふさわしくないということはありません。

3.2 コヒーレンス空間

Definition 3.2.1. コヒーレンス空間 (coherent space) [2, p.164]
コヒーレンス空間 X とは次からなるものである[*5]。

- 底となる集合 $|X|$
- $|X|$ 上の反射対称関係 $(\frown_X)$

$|X|$ を X のウェブ (web)、$(\frown_X)$ を X のコヒーレンスと呼ぶ。また $x, y \in |X|$ が $x \frown_X y$ であるとき x と y はコヒーレント (coherent) である、などという。このとき部分集合 $a \subset |X|$ が、任意の $x, y \in a$ について $x \frown_X y$ であるとき X のクリーク (clique) であるという[*6]。これを $a \sqsubset X$ と書くこともあるが、ここでは X それ自身をクリーク全体からなる族とみなして $a \in X$ と表記する。

コヒーレンス空間 X をクリーク全体の集合として見たとき、$X \subset \mathfrak{P}(|X|)$ であり、自然に包含関係について半順序が入る。以下、X の順序構造についての概念 (上限下限等) は特に断らない限りこれに基づくものとする。

コヒーレンス空間は一般に束にはならない。例えばコヒーレントでない二元 $x \not\frown_X y$ をとれば、コヒーレンスが反射的であるから $\{x\}, \{y\} \in X$ だが $\{x, y\} \notin X$ である。

以下では有向な族を扱うため、有向性を定義しておく。

Definition 3.2.2. 半順序集合 P において、部分集合 $D \subset P$ が有向 (directed) であるとは

- $D \neq \emptyset$ であり
- 任意の $x, y \in D$ に対して、ある $z \in D$ があって $x \leq z$ かつ $y \leq z$ を満たすことをいう。

Proposition 3.2.3. コヒーレンス空間 X について以下が成り立つ。

1. X は下方に閉じている。即ち $b \subset a \in X$ ならば $b \in X$ である。
2. 任意の部分族 $M \subset X$ について、もしどの $a, b \in M$ についても $a \cup b \in X$ ならばその上限 $\bigcup M$ は X に属する。[*7]
3. X の任意の有向部分族 $D \subset X$ について、その上限 $\bigcup D$ は X に属する。

Proof. まず、$a \in X$ とその部分集合 $b \subset a$ をとれば、b のどの二点もコヒーレントであることは a がクリークであることの定義からすぐに分かる。よって X は $\mathfrak{P}(|X|)$ 内で下方に閉じている。

次に $M \subset X$ を各 $a, b \in M$ について $a \cup b \in X$ であるようにとるとする。任意に $x, y \in \bigcup M$ をとれば、ある $a, b \in M$ があって $x \in a$、$y \in b$ であり、いま $a \cup b \in X$ で

[*5] [5] で「整合空間」と訳されていると後で教えて頂いた。
[*6] $\subset$ は真の部分集合を表す記号として用いられることがあるが、ここではそうではない。等しいかもしれないことを強調するときに $a \subseteq b$、真の部分集合であることを強調するときに $a \subsetneq b$、特に何も考えていないときに $a \subset b$ と書いている。
[*7] ここで $\bigcup M$ は $\bigcup_{a \in M} a$ を表す。

ある (つまり $a \cup b$ がクリークである) から $x \frown_X y$ が導かれる。従って $\bigcup M$ はクリークである。

最後に有向部分族 $D \subset X$ について、D の上限が X に属することを見よう。各 $a, b \in D$ についてこれらの上界が D 内に存在する。それを $c \in D$ とすれば、特に $a \cup b \subset c \in X$ であるから X の下方閉性より $a \cup b \in X$ である。従って 2 より D の上限が X に属する。

2 は二項和完備[*8]、3 は「有向族の和で閉じる」などと言う。

有向族の和で閉じることは証明の通り二項和完備性からすぐに出てくる。実は上の命題の最初の二つの性質がコヒーレンス空間を特徴付ける。

Proposition 3.2.4. 集合族 $\mathfrak{X}$ が次を満たすとする。

1. 包含関係について下方に閉じている
2. $M \subset \mathfrak{X}$ について、各 $a, b \in M$ が $a \cup b \in \mathfrak{X}$ を満たすとき $\bigcup M \in \mathfrak{X}$ である

このとき $x, y \in \bigcup \mathfrak{X}$ に対して $x \frown y$ を $\{x, y\} \in \mathfrak{X}$ で定めるとこれは反射対称関係である。これらによって出来るコヒーレンス空間のクリーク全体の集合は $\mathfrak{X}$ と一致する。

Proof. 各 $a \in \mathfrak{X}$ について a のどの二点もコヒーレントであることは定義よりすぐに分かる。クリーク $b \subset \bigcup \mathfrak{X}$ をとるとこれが $\mathfrak{X}$ に属することを見よう。各 $x, y \in b$ について $x \frown y$ が成り立つから $\{x, y\} \in \mathfrak{X}$ である。よって部分族 $B := \{\{x\} \in \mathfrak{X} | x \in b\} \subset \mathfrak{X}$ は二項和完備性からその和集合を $\mathfrak{X}$ に持つ。よって $b = \bigcup B \in \mathfrak{X}$ である。従って $\mathfrak{X}$ は $(\frown)$ で定められたコヒーレンス空間のクリーク全体の族に等しい。

もちろんコヒーレンス空間 X についてそのクリーク全体から上のように新たにコヒーレンス空間を構成すればそれは X と同じものである。特に、コヒーレンスはこの族に属する一点集合と二点集合によって決まる。

Remark. 二項和完備性の代わりに有向族の和の閉性を課した集合族を qualitative domain ([3]) という。これはコヒーレンス空間の定義より真に弱い。例えば $|X| = \{1, 2, 3\}$、$X = \mathfrak{P}(|X|) \setminus \{|X|\}$ とおけば、X は下方に閉じ更に有向部分族の和でも閉じる (つまり qualitative domain である) が、上のように定めたコヒーレンスにおいて $|X|$ がクリークであるにも関わらず $|X| \notin X$ である。これは二項完備でないということである。

3.3 安定関数

Definition 3.3.1. 安定関数 (stable function).
X, Y をコヒーレンス空間とする。X から Y への安定関数 $F : X \longrightarrow Y$ とは

- X のクリークを Y のクリークに写す順序保存写像であって
- 有向族の和を保ち
- コヒーレント交叉を保つものをいう。

[*8] [4] では binary completeness と書かれている。適切な日本語訳が見つからなかったのでここではこのように呼ぶことにする。

ここでコヒーレント交叉とは、$a, b \in X$ について $a \cup b \in X$ であるときに $a \cap b$ のことをいう。つまりコヒーレント交叉を保つとは $a, b \in X$ が $a \cup b \in X$ であるとき $F(a \cap b) = F(a) \cap F(b)$ となることである。

Remark. コヒーレンス空間は底の集合の冪集合の部分族として半順序が定められているのだった。これを圏と見做せば、コヒーレント交叉は圏論的な意味での交叉ということになる。$a \cup b \in X$ という前提条件は、a, b がある一つの対象の部分対象であることを意味する。$a, b \in X$ が $c \in X$ の部分対象であるとは今ここでは $a, b \subset c$ ということで、このとき a, b の圏論的な意味での交叉は集合としての交叉 $a \cap b$ に一致し、それは $a \subset c$ と $b \subset c$ の引き戻し (pullback) に等しいということになる。半順序集合を圏とみなせばその射はすべてモノ射だから、言い換えれば安定関数 $F : X \longrightarrow Y$ とは X から Y への函手であって有向集合上の順極限と引き戻しを保つものである。

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & a \arrow[d] \\ b \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

安定関数の順序を次の様に定める。

Definition 3.3.2. 安定関数の順序.
安定関数 $F, G : X \longrightarrow Y$ が任意の $a \in X$ について $F(a) \subset G(a)$ であって、かつ任意の $a \subset b \in X$ について $F(b) \cap G(a) = F(a)$ を満たすとき $F \sqsubset G$ と定める。これは Berry の順序とも呼ばれることがある。

つまり各 $a \subset b \in X$ について次が引き戻し図式になるとき $F \sqsubset G$ である。

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & F(b) \arrow[d] \\ G(a) \arrow[r] & G(b) \end{tikzcd}$$

コヒーレンス空間の上の恒等射像は安定であり、安定関数の合成は再び安定となる。よってコヒーレンス空間と安定関数からなる圏が定まる。

3.4　コヒーレンス空間と安定関数からなる圏のカルテシアン閉性

この圏がカルテシアン閉圏であることを見よう。

3.4.1　積

まず積を構成する。X, Y をコヒーレンス空間とする。クリークの族が $X \times Y$ に等しくなるようにとれば良い。そこで $X \& Y$ を次の様に定める。

- $|X \& Y| = |X| \sqcup |Y|$
- $z_1 \frown_{X \& Y} z_2$ は

- $z_1, z_2 \in |X|$ であって $z_1 \frown_X z_2$
- $z_1, z_2 \in |Y|$ であって $z_1 \frown_Y z_2$
- $z_1 \in |X|$ かつ $z_2 \in |Y|$
- $z_1 \in |Y|$ かつ $z_2 \in |X|$

のいずれかが成り立つこととする。

コヒーレンスは集合としては

$$(\frown_{X\&Y}) = (\frown_X) \cup (\frown_Y) \cup (|X| \times |Y|) \cup (|Y| \times |X|)$$

である。もちろん反射的かつ対称的である。

部分集合 $\alpha \subset |X\&Y|$ は $\alpha = (\alpha \cap |X|) \sqcup (\alpha \cap |Y|)$ のように $|X|$ の部分集合と $|Y|$ の部分集合への一意的な分解を持つ。これによって $\mathfrak{P}(|X\&Y|)$ と $\mathfrak{P}(|X|) \times \mathfrak{P}(|Y|)$ が一対一に対応する。

$X\&Y$ の射影をこの対応の制限によって定める。$\pi_X : X\&Y \longrightarrow X$ は $\pi_X(\alpha) = \alpha \cap |X|$、$\pi_Y : X\&Y \longrightarrow Y$ は $\pi_Y(\alpha) = \alpha \cap |Y|$ である。

Proposition 3.4.1. この射影は安定である。

Proof. 片方について調べれば十分である。$\pi = \pi_X$ と書く。$\alpha \subset \beta \in X\&Y$ とすればそれぞれの $|X|$ との交叉もこの順序を保つから $\pi(\alpha) \subset \pi(\beta)$ である。有向族 $D \subset X\&Y$ についても

$$\left(\bigcup D\right) \cap |X| = \bigcup_{d \in D} (d \cap |X|)$$

であるから $\pi(\bigcup D) = \bigcup \pi(D)$ である。従って有向族の和を保つ。$\alpha, \beta \in X\&Y$ が $\alpha \cup \beta \in X\&Y$ を満たすとすると $(\alpha \cap |X|) \cup (\beta \cap |X|) \in X$ である。従ってこれは交叉を X にもち、

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \cap \beta) &= (\alpha \cap \beta) \cap |X| \\ &= (\alpha \cap |X|) \cap (\beta \cap |X|) \\ &= \pi(\alpha) \cap \pi(\beta) \end{aligned}$$

となる。従って π は安定関数である。

Proposition 3.4.2. $X\&Y$ は X と Y の積を与える。

Proof. $X\&Y$ が積の普遍性を満たすことを示そう。コヒーレンス空間 Z と安定関数 $f : Z \longrightarrow X$、$g : Z \longrightarrow Y$ が得られたとする。自然に $\langle f, g \rangle : z \longrightarrow X \times Y$ が得られる。$\mathfrak{P}(|X\&Y|) \simeq \mathfrak{P}(|X|) \times \mathfrak{P}(|Y|)$ を通して $\langle f, g \rangle : Z \longrightarrow \mathfrak{P}(|X\&Y|)$ と見なそう。ここで $\langle f, g \rangle (z) = f(z) \sqcup g(z)$ である。$f(z)$ と $g(z)$ はそれぞれ X と Y のクリークだから $f(z) \sqcup g(z)$ は $X\&Y$ のクリークとなる。順序、有向族の和、コヒーレント交叉を保つこともすぐに分かる。勿論 $\pi_X \langle f, g \rangle = f$、$\pi_Y \langle f, g \rangle = g$ が成り立つ。また $\langle f, g \rangle$ の導出から一意性も自明である。

3.4.2 冪

次に積に対して冪 $X \Rightarrow Y$ を構成しよう。次の補題が鍵になる。

Lemma 3.4.3. $F : X \longrightarrow Y$ を安定関数とする。

1. $a \in X$、$y \in F(a)$ とする。このとき有限クリーク[*9]$b \subset a$ で $y \in F(b)$ となるものが存在する。
2. $a \in X$、$y \in F(a)$ に対して $y \in F(b)$ となる有限クリーク $b \subset a$ は最小に取れる。

Proof. F は有向族の和を保つので

$$y \in F(a) = \bigcup_{b \in a_{\mathrm{fin}}} F(b)$$

である。ただしここでは a_{fin} と書いて a の有限部分クリーク全体の族を表すことにする。従ってなんらかの $b \in a_{\mathrm{fin}}$ があって $y \in F(b)$ となる。このような $b \in a_{\mathrm{fin}}$ 全体の交叉をとって c とする。もちろん $c \subset a \in X$ である。$y \in F(c)$ であれば c が求める最小の有限クリークであるのでこれを示そう。

Claim. c は有限個の b の交叉で表される。つまり $y \in F(b_i)$ なる $b_1, \cdots, b_n \in a_{\mathrm{fin}}$ があって、$c = b_1 \cap \cdots \cap b_n$ となる。

c がこのように表せないと仮定して矛盾を導こう。とりあえず $b_1 \in a_{\mathrm{fin}}$ を $y \in F(b_1)$ となるようにとれて、これは c を含む。c は有限交叉で表せないから特に $c \subsetneq b_1$ である。c の定義から、$b_2 \in a_{\mathrm{fin}}$ を $c \subset b_1 \cap b_2 \subsetneq b_1$ となるようにとれる。もちろん $c \subsetneq b_1 \cap b_2$ である。

同様にして各 $n > 0$ について $c \subsetneq b_1 \cap \cdots \cap b_n$ であるときに $b_{n+1} \in a_{\mathrm{fin}}$ を $c \subsetneq b_1 \cap \cdots \cap b_n \cap b_{n+1} \subsetneq b_1 \cap \cdots \cap b_n$ となるようにとれる。しかし b_1 は有限集合であったので、

$$\#(b_1 \cap \cdots \cap b_{n+1}) < \#(b_1 \cap \cdots \cap b_n)$$

となる。従ってある $N > 0$ にたいして $b_1 \cap \cdots \cap b_N = \emptyset$。しかし仮定より $c \subsetneq b_1 \cap \cdots \cap b_N$ でありこれは矛盾である。よって c は $c = b_1 \cap \cdots \cap b_n$ の形で表せる。

いま F はコヒーレント交叉を保つから $F(c) = F(b_1) \cap \cdots \cap F(b_n)$ が成り立つ。それぞれ $y \in F(b_i)$ であるから $y \in F(c)$ である。従って c は求める最小クリークである。

よって $y \in |Y|$ が F の像となるクリークに属する元であれば、X の有限クリークで $y \in F(b)$ となる $b \in X$ 全体には極小元が存在する。

Proposition 3.4.4. $F : X \longrightarrow Y$ を安定関数とする。各 $y \in |Y|$ について

$$D_y := \{a \in X \,|y \in F(a)\}$$

と定める。$C_y \subset D_y$ を極小元全体とする (ただし $D_y = \emptyset$ ならば $C_y = \emptyset$)。上の補題より各 $b \in C_y$ は有限クリークである。このとき $\{C_y\}_{y \in |Y|}$ は次の意味で F を特徴付ける。

各 $a \in X$、$y \in |Y|$ について次が同値

- $y \in F(a)$
- ある $b \in C_y$ があって $b \subset a$

[*9] 有限集合であるようなクリークのこと。

Proof. $y \in F(a)$ なる $a \in X$ があれば、補題より有限クリーク $b \subset a$ を $y \in F(b)$ となるように最小に取れる。もちろん $b \in C_y$ である (b が極小でなければ a 内での最小性に矛盾する)。逆に $b \in C_y$ が $b \subset a$ をみたせば $y \in F(b) \subset F(a)$ である。

また、これらは Berry の順序で保たれる。

Lemma 3.4.5. Berry の順序がついた二つの安定関数 $F \sqsubset G : X \longrightarrow Y$ について、上の命題の意味でこれらを特徴付ける族をそれぞれ $\left\{C_y^F\right\}_{y \in |Y|}$、$\left\{C_y^G\right\}_{y \in |Y|}$ とする。このとき各 $y \in |Y|$ について $C_y^F \subset C_y^G$ である。

Proof. $y \in |Y|$ を任意にとる。$C_y^F = \emptyset$ ならば自明に成り立つ。$C_y^F \neq \emptyset$ としよう。

$b \in C_y^F$ であるとする。$y \in F(b) \subset G(b)$ であるから、ある $b' \in C_y^G$ があって $b' \subset b$ となる。

$$\begin{array}{ccc} F(b') & \longrightarrow & F(b) \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow \\ G(b') & \longrightarrow & G(b) \end{array}$$

いま Berry の順序の定義から $y \in F(b) \cap G(b') = F(b')$ であるから、$b \in C_y^F$ の極小性より $b' = b$ が分かる。よって $b \in C_y^G$。

従って $C_y^F \subset C_y^G$。

$\{C_y\}_{y \in |Y|}$ の性質をみよう。

Lemma 3.4.6. $F : X \longrightarrow Y$ を安定関数とし、これを特徴付ける族を $\{C_y\}$ とおく。次が成り立つ。

1. $y_1, y_2 \in |Y|$、$a_1 \in C_{y_1}, a_2 \in C_{y_2}$ について、もし $a_1 \cup a_2 \in X$ ならば $y_1 \frown_Y y_2$
2. 記号は上のままとして $a_1 \cup a_2 \in X$ であってさらに $a_1 \neq a_2$ ならば $y_1 \frown_Y y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$

Proof. もし $a_1 \cup a_2 \in X$ ならば、$y_1, y_2 \in F(a_1) \cup F(a_2) \subset F(a_1 \cup a_2) \in Y$ である[*10]。つまり $F(a_1 \cup a_2)$ がクリークであるから $y_1 \frown_Y y_2$ である。

$a_1 \cup a_2 \in X$ かつ $a_1 \neq a_2$ であるとしよう。先に示したことからもちろん $y_1 \frown_Y y_2$ である。$y_1 = y_2$ と仮定する。F がコヒーレント交叉を保つから $y_1 = y_2 \in F(a_1) \cap F(a_2) = F(a_1 \cap a_2)$ である。$a_i \in C_{y_i}$ の極小性より $a_1 \cap a_2 = a_i$ を導くが、これは $a_1 \neq a_2$ に矛盾する。よって $y_1 \neq y_2$ である。

逆にこの補題における性質をみたすような族 $\left\{C'_y \subset X\right\}_{y \in |Y|}$ が与えられたら、それによって特徴付けられる安定関数が定義できる。

Lemma 3.4.7. コヒーレンス空間 X, Y と族 $C' = \left\{C'_y \subset X\right\}_{y \in |Y|}$ が、各 $y_1, y_2 \in |Y|$ と $a_1 \in C'_{y_1}, a_2 \in C'_{y_2}$ について次を満たすとする。

- $a_1 \cup a_2 \in X$ ならば $y_1 \frown_Y y_2$
- $a_1 \cup a_2 \in X$ かつ $a_1 \neq a_2$ ならば $y_1 \frown_Y y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$

[*10] 今、$\{a, b, a \cup b\}$ は X の有向族だから実は $F(a \cup b) = F(a) \cup F(b)$ が成り立つ。

このとき C' によって特徴付けられる安定関数 $\langle C'\rangle : X \longrightarrow Y$ を次のように定義できる。

$$\langle C'\rangle (a) = \left\{ y \,\middle|\, \text{ある } b \in C'_y \text{ について } b \subset a \text{ となる} \right\} \subset |Y|$$

Proof. まず $\langle C'\rangle$ が安定関数になることを示そう。任意の $a \in X$ について $\langle C'\rangle (a)$ がクリークとなることを見る。$\langle C'\rangle (a) \neq \emptyset$ としてよい。$y_1, y_2 \in \langle C'\rangle (a)$ を任意にとる。このとき定義から、各 y_i についてある $b_i \in C'_{y_i}$ があって $b_i \subset a$ となる。$b_1 \cup b_2 \subset a \in X$ と族 C' の仮定より $y_1 \frown_Y y_2$ である。

順序を保存することは定義から自明である。

有向族の和を保つことをみよう。$D \subset X$ は有向族とする。各 $d \in D$ について $\langle C'\rangle (d) \subset \langle C'\rangle (\bigcup D)$ であるから $\bigcup_{d\in D} \langle C'\rangle (d) \subseteq \langle C'\rangle (\bigcup D)$ であることはよい。逆に $y \in \langle C'\rangle (\bigcup D)$ を任意にとれば、定義からある $b \in C'_y$ があって $b \subset \bigcup D$ となる。b は有限クリークだから特にある $d \in D$ によって $b \subset d$ となる。このとき $y \in \langle C'\rangle (d) \subset \bigcup_{d\in D} \langle C'\rangle (d)$ であるから、従って $\langle C'\rangle (\bigcup D) = \bigcup_{d\in D} \langle C'\rangle (d)$ である。

最後にコヒーレント交叉を保つことをみる。$a \cup b \in X$ となる $a, b \in X$ をみる。順序を保つことから $\langle C'\rangle (a \cap b) \subseteq \langle C'\rangle (a) \cap \langle C'\rangle (b)$ であることはよい。$y \in \langle C'\rangle (a) \cap \langle C'\rangle (b)$ を任意にとる。$\langle C'\rangle$ の定義から $c_1, c_2 \in C'_y$ を $c_1 \subset a$、$c_2 \subset b$ となるようにとれる。このとき $a \cup b \in X$ より特に $c_1 \cup c_2 \in X$ である。また C' に課された仮定から $c_1 = c_2$ でなくてはならない (もし $c_1 \neq c_2$ ならば $y \neq y$ が導かれ矛盾する)。よって $c = c_1 = c_2 \subset a \cap b$ であり、$y \in \langle C'\rangle (c) \subset \langle C'\rangle (a \cap b)$。以上より $\langle C'\rangle (a \cap b) = \langle C'\rangle (a) \cap \langle C'\rangle (b)$ である。従って $\langle C'\rangle$ はコヒーレント交叉を保つ。

以上より $\langle C'\rangle : X \longrightarrow Y$ は安定関数となる。

C' が $\langle C'\rangle$ を特徴付けることをみよう。$\langle C'\rangle$ を特徴付ける族を C'' として、各 $y \in |Y|$ について $C'_y = C''_y$ を示そう。

任意に $b \in C'_y$ をとる。b が $y \in \langle C'\rangle (a)$ なる $a \in X$ の中で極小であることを見よう。$a \subseteq b$ が $y \in \langle C'\rangle (a)$ を満たすとする。このとき $\langle C'\rangle$ の定義から $b' \in C'_y$ があって $b' \subseteq a$ となる。$b' \cup b = b \in X$ であり $y = y$ だから、C' に課せられた条件より $b' = b$ でなくてはならない。従って $a = b$ であり b は極小であることが示された。よって $b \in C''_y$ だから $C'_y \subseteq C''_y$ である。

逆の包含を示す。$b \in C''_y$ を任意にとる。すなわち b は $y \in \langle C'\rangle (b)$ となるものの中で極小である。$\langle C'\rangle$ の定義より、ある $b' \in C'_y$ があって $b' \subseteq b$。特に $y \in \langle C'\rangle (b') \subset \langle C'\rangle (b)$ であるから b の極小性より $b' = b$ を導く。従って $b \in C'_y$ である。よって $C'_y = C''_y$。

以上より C' は C'' に等しい。

逆の対応も成り立つ。つまり安定関数を特徴付ける族から安定関数を作るとそれは元の関数に一致する。

Lemma 3.4.8. $F : X \longrightarrow Y$ は安定関数とする。$C = \{C_y\}_{y\in|Y|}$ によって F を特徴付ける族を表す。

このとき $\langle C\rangle = F$ が成り立つ。

Proof. 3.4.4 から殆ど自明である。

$a \in X$ を任意にとる。$\langle C\rangle (a) = F(a)$ を示そう。

$y \in \langle C\rangle (a)$ をとると、定義から $b \in C_y$ があって $b \subset a$ となる。C は F を特徴付ける

からそれは $y \in F(a)$ を導く。

逆に $y \in F(a)$ をとる。なんらかの $b \in C_y$ があって $b \subset a$ となる。従って $y \in \langle C \rangle (a)$ である。

以上より $F = \langle C \rangle$ が示された。

Definition 3.4.9. 骨子 (skeleton).
$F : X \longrightarrow Y$ を安定関数とする。補題 (3.4.4) の意味で F を特徴付ける族 C は F の骨子と呼ばれ $Sk(F) = C$ と書き表す。

$Sk(F)$ は $X_{\mathrm{fin}} \times |Y|$ の部分集合と同一視できる。ここで X_{fin} は X の有限クリーク全体からなる族である。つまり $(b, y) \in Sk(F)$ とは $y \in F(b)$ かつ b はそのようなものの中で極小であることと定義する。今までの記号 $C = \{C_y\}_{y \in |Y|}$ を使って $Sk(F)$ を再定義するとすれば

$$Sk(F) = \bigcup_{y \in |Y|} \{(b, y) \,|\, b \in C_y\}$$

である。

補題 (3.4.7) で見た条件は $X_{\mathrm{fin}} \times |Y|$ の上の反射対称関係となる。実際 $(b_1, y_1) \frown (b_2, y_2)$ であることを

- $b_1 \cup b_2 \in X$ ならば $y_1 \frown_Y y_2$
- $b_1 \cup b_2 \in X$ かつ $b_1 \neq b_2$ であるならば $y_1 \frown y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$

と定めると、反射的かつ対称的であることが直ぐに分かる。従って底の集合を $X_{\mathrm{fin}} \times |Y|$ とするコヒーレンス空間が定義出来る。また、安定関数の骨子はこのコヒーレンスによってこの空間のクリークであり、逆にこの空間のクリークは補題 (3.4.7) を満たすから安定関数の骨子となることが分かる。

以上よりコヒーレンス空間と安定関数の圏における冪 $X \Rightarrow Y$ を定める。

- $|X \Rightarrow Y| := X_{\mathrm{fin}} \times |Y|$
- $(b_1, y_1) \frown (b_2, y_2)$ は次で定める。
  - $b_1 \cup b_2 \in X$ ならば $y_1 \frown y_2$
  - $b_1 \cup b_2 \in X$ かつ $b_1 \neq b_2$ であるならば $y_1 \frown y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$

これまでに見てきた通り、$X \Rightarrow Y$ のクリークは X から Y への安定関数と一対一に対応する。

Corollary 3.4.10. Sk と $\langle - \rangle$ は X から Y への安定関数全体の集合と $X \Rightarrow Y$ のクリーク全体の間の全単射を与える。また、この対応は順序 (包含関係と Berry の順序) を保つ。

$X \Rightarrow Y$ が本当に冪であることを確かめよう。

Lemma 3.4.11. X, Y をコヒーレンス空間とする。$\varepsilon = \varepsilon_Y : X \& (X \Rightarrow Y) \longrightarrow Y$ を

$$\varepsilon(a, C) := \langle C \rangle (a)$$

と定める[*11]。ε は安定関数である。

[*11] $X \& Y$ のクリークは X のクリークと Y のクリークの直和で表されるのだった。これは X のクリークと

Proof. クリークをクリークに写す順序保存写像であることはよい。安定関数の定義やBerry の順序等を考えれば有向族の和、コヒーレント交叉を保つことも自明である。

Proposition 3.4.12. X, Y, Z はコヒーレンス空間、$F : X\&Y \longrightarrow Z$ は安定関数とする。このときある安定関数 $G : Y \longrightarrow X \Rightarrow Z$ が存在して $F = \varepsilon_Z \circ (1_X \& G)$ が成り立つ。ここで $1_X \& G : X\&Y \longrightarrow X\&(X \Rightarrow Z)$ は (a, b) を $(a, G(b))$ に写す安定関数である。

$$\begin{tikzcd} X\&Y \arrow[r, "1_X\&G"] \arrow[dr, "F"'] & X\&(X\Rightarrow Z) \arrow[d, "\varepsilon_Z"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Proof. そのような G があるとすれば $G(b)$ は $a \in X$ を $F(a, b)$ に写す安定関数の骨子に他ならない。従って G を

$$G(b) := Sk(F(-, b))$$

と定め、これが安定関数であることを示せばよい。

$b_1 \subset b_2 \in Y$ ならば $F(-, b_1) \sqsubset F(-, b_2)$ である。実際、F が順序を保つから各 $a \in X$ について $F(a, b_1) \subset F(a, b_2)$ であり、また $a_1 \subset a_2 \in X$ ならば F がコヒーレント交叉を保つから $F(a_2, b_1) \cap F(a_1, b_2) = F(a_1, b_1)$ である。

$$\begin{tikzcd} F(a_1, b_1) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & F(a_2, b_1) \arrow[d] \\ F(a_1, b_2) \arrow[r] & F(a_2, b_2) \end{tikzcd}$$

従って $G(b_1) = Sk(F(-, b_1)) \subset Sk(F(-, b_2)) = G(b_2)$ である。つまり G は順序を保つ。

X から Z への安定関数が順序を保って $X \Rightarrow Z$ のクリークに対応しているから、Berry の順序による安定関数の有向集合はその上限をもち、もちろん各々の対応するクリークからなる有向族の和で表されるクリークと対応する。従って $D \subset Y$ を有向族とすれば

$$\begin{aligned} G\left(\bigcup D\right) &= Sk\left(F\left(-, \bigcup D\right)\right) \\ &= Sk\left(\sup_{d \in D} F(-, d)\right) \\ &= \bigcup_{d \in D} Sk(F(-, d)) \\ &= \bigcup_{d \in D} G(d) \end{aligned}$$

となる。従って G は有向族の和を保つ。

最後にコヒーレント交叉を保つことを見る。$b_1 \cup b_2 \in Y$ であるとする。

$$\begin{aligned} G(b_1 \cap b_2) &= Sk(F(-, b_1 \cap b_2)) \\ &= Sk(F(-, b_1) \cap F(-, b_2)) \\ &= Sk(F(-, b_1)) \cap Sk(F(-, b_2)) \\ &= G(b_1) \cap G(b_2) \end{aligned}$$

Y のクリークのペアとして考えて差し支えないから、以降 $(a, b) \in X\&Y$ のように表記する。

従って G はコヒーレント交叉を保つ。

従って F に対して一意的な G が定まり $\varepsilon_Z \circ (1_X \& G) = F$ を満たす。

以上より $X\&-$ と $X \Rightarrow -$ が随伴であることが分かったので次が示された。

Theorem 3.4.13. コヒーレンス空間と安定関数からなる圏はカルテシアン閉圏である。

参考文献

[1] Benjamin C. Pierce, 型システム入門 プログラミング言語と型の理論. 住井英二郎 監訳. 遠藤侑介 酒井政裕 今井啓吾 黒木裕介 今井宜洋 才川隆文 今井健男 訳. オーム社. 2013.

[2] Jean-Yves Girard. Blind Spot. Amer Mathematical Society. 2011.

[3] Jean-Yves Girard. The System F of variable types, fifteen years later. Theoretical Computer Science 45. p159-192 1986.

[4] Jean-Yves Girard. Proof and Types. translated by Paul Taylor, Yves Lafont. Cambridge University Press. 1989.

[5] 照井一成, 線型論理の誕生, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/%7Eterui/birth.pdf

第 4 章

4 人のヨークシャー数学者

淡中 圏

4 人のヨークシャー数学者がソファに座って、昔のことを思い出しながら話の花を咲かせている。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[u] & D \arrow[l] \end{tikzcd}$$

最近の若いモンはなっとらん！甘やかされとる！ (A)
全くじゃ！ワシらの若い頃と言ったら本当にひどかった。 (B)
厳しい時代じゃった! (C)
わしらはその厳しい時代を生き抜いた。それに比べて今の若いモンはなんじゃ！ (D)
アカハラだのパワハラだのと喚きおって。
わしらの頃はそんなものは当たり前じゃたのに。 (A)
みんなそうやって鍛えたんじゃ。
わしは全ての用語に対して well-defined であることを要求された。
それができなければスリッパで叩かれたもんじゃよ。 (B)
ほう。用語が well-defined かどうかを聞かれたと (A)
そうだが (B)
甘いなあ (A)

そう言われて A に向かって目を剥く B。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[l] \\ C \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

わしが学生の頃は、全ての用語どころじゃなかったわい。
そもそも数学が well-defined かどうかを要求されたもんじゃよ。
それが証明できんと、一言も数学について語ることを許されなかったもんじゃ。 (A)
ほう、well-defined を要求されたのは数学だけなのか？？ (C)
なに？ (A)
わしは日常の全ての発言が well-defined であることを要求された。
おかげで、大学を辞めるまで喋ることができなかった。 (C)
そんなのは随分マシじゃ。
わしのいたとこではな、well-defined でないものは存在を許されておらなんだ。
だから、自分が well-defined であることを証明するまでは、
存在することすら許されなかったのじゃ。
わしの友達は、とうとう存在できずじまいで、
後遺症か何かのせいで未だに存在していないはずじゃ。 (D)
全くあの頃はひどかった。 (A)
そうじゃ。おかげで鍛えられた。 (D)
厳しかった。
初年度の線形代数の授業がいきなり環の定義から始まり、
線形空間は環上の加群の特別な例として、
かなり授業が進んでから初めて出て来たものじゃ。
多くの生徒が一ヶ月以内にふるい落とされた。 (C)
ふうん。優しい授業じゃないか。 (B)

今度は C が B に目を剥いた。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[ur] & D \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

わしの受けた数学の授業は、マグマから始めたな。
話がループに至る頃にはもう誰もいなかったから誰も気づかなかったくらいじゃ。 (B)
わしの受けた授業では、まず圏の一般論から初めて、
全ての概念をカン拡張で定義したもんじゃよ。 (D)
わしはまず論理学から始めたぞ。
与えられた記号と明示された公理と推論規則から初等算術の基本的な定理を証明し、
しかるのちに実数を定義し、幾何学や解析学へと移行するのじゃ。
結果的にパラドクスが起きて、学生が一人爆発してしまった。爆発則の力でな。 (A)
あの頃の授業は今みたいに甘くなかったからな。容赦無く生徒を叩き落とした。 (B)
生徒も今みたいに甘えていなかった。授業に出なくても自分で勉強したもんじゃ。 (A)
先生もまともに授業なんてやっとらんかった。
ある先生などは定理の証明について授業が始まってからずっと考えて、
授業の終わり頃に、うむ、これは自明だ、と呟いて証明を終えおった。 (D)
まったく普通の話じゃないか。 (C)

その言葉に D は怪訝な顔をする。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d] \\
C \arrow[u] & D \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

わしの師匠は、数学の全ての正しい命題はトートロジーであり自明である、
という理由で、何一つ詳しい証明を説明してくれなかったわ。 (C)

わしの指導教官は貴族だったからな。そもそも証明はしなかった。
証明はわしら奴隷の仕事じゃったよ。 (A)

それでも、わしのところよりは随分マシだな。 (B)

ほう、どういう意味じゃ。 (A)

わしのところでは、数学的概念とは全て数学者の精神の産物だとされておった。
当然、証明とは数学的概念を精神的に構成することじゃ。
だからわしらはお前らが後生大事に使っておった、
あの堕落した無限集合やら排中律やら背理法などは一切使わず、
ひたすら非可換な C^*環に対応する点のない空間や
自然数論の無矛盾性を証明するのに必要十分な最小のϵ数ϵ_0や、
双対鎖複体 $\cdots \to X^{-1} \to X^0 \to X^1 \to X^2 \to \cdots$ 同士の間の射を、
ホモトピー同値で割ってできる導来圏や、7 次元球面の 28 通りの微分構造や、
非可測集合や、ナヴィエ・ストークス方程式の滑らかな解や、
フルショフスキーの新しい強極大集合を、精神の中で構成しようと、
坐禅を組んで壁を見ながらウンウン唸っていると、
だんだんと耳や鼻の穴から、概念がボロボロ漏れ出して、
それを工場で加工して世界に輸出していたもんじゃよ。 (B)

しかし、勉強にはなったろ。 (A)

まあな。
最近の若いモンは苦労をしてないからダメなのじゃ。
勉強だけじゃない。生活全般でな。
わしの学生時代は何しろ貧乏だった。遊ぶ金なんかまったくなかったし、
毎日毎日バイトバイトでへとへとじゃった。
それでもちゃんと勉強しとったもんじゃ (B)

ああそうじゃ。わしなんか、バイトから帰ってきてから勉強して寝ると、
一日の食事回数が負になったもんじゃ。
それにもかかわらず、給料が安すぎて、一回分の食費も負になってしまったから、
結局食費がかさんで苦労したがね。 (A)

いい生活じゃないか。 (D)

A だけではない。今では全員が目を剥いてお互いへの対抗心に燃え上がっている。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & B \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
C \arrow[r, leftrightarrow] & D
\end{tikzcd}
$$

ワシなんか、バイト代が無限小じゃったからな。
何にも買えなかったが、金額に対する満足度の微分係数を求めるのに、
仲間達に重宝されたのも今ではいい思い出じゃ。
そう言えばワシの給料は矛盾しているとかで、
哲学科の奴らがよく難癖をつけてきたのお。 (D)
そんなものはワシに言わせればブルジョアの生活じゃな。
ワシが行っていたバイトでは、労働時間は 1 日$\aleph_0$じゃった。
それでもまだマシなくらいじゃった。上には上がおった。
同僚の中には正則な極限基数時間働いておった奴もいたし、
一人、宇宙の非自明な初等埋め込みを構成してしまいそうな奴もいて、
レジの打ち間違えで $1 = 0$ してしまうんじゃないかと心配したもんじゃ。 (B)
爆発してしまうじゃないか。 (A)
コホン (C)

全員の目が C に注がれる。C はソファから身を起こして、勿体ぶったジェスチャーをしながらも、情熱的な口調でまくし立て始めた。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "?"] & B \arrow[dl, "?"] \\ C & D \arrow[l, "?"'] \end{tikzcd}$$

ワシが働いていたバイトではな。
お前らのように、給料やら労働時間やらを比べることが不可能だった。
なぜならそもそも四則演算とコンパチブルな順序を入れることが不可能だったからじゃ。
働いて、時給をもらうと、こちらがお金を払わなくてはいけないこともよくあったもんじゃ。
しかもその給料の金額は非可換だったのじゃ。つまり交換できないのじゃ。
さらに酷い時なんか非結合的でな。つまり、別の日の給料と結合できないのじゃ。
そして、せっかく一所懸命働いて、0 じゃない札を 0 じゃない枚数持っていたはずなのにな、
掛けると 0 になるのじゃ。どこにもなくなってしまう。
お前らにこの虚無が分かるか？　ああっ！？ (C)
若いモンにはわからんじゃろうな。 (B)
ああ、分からん。あいつらは甘やかされとるからの。 (C)

こうして四人のヨークシャー数学者の長話はアレクサンドルフ直線のように長く続くのだった。無理やりオチを付けて一点コンパクト化してしまうと、多様体ではなくなってしまうので、オチが付かないまま終わらせてもらおう。

$$\cdots \to C \to D \to A \to B \to C \to D \to A \to B \to \cdots$$

Appendix

この Appendix は炎症を起こして切除されてしまいました。

木村 允哉　参加させて頂けたこと、この場をお借りして皆さんに御礼申し上げます。指摘等があれば twitter (@mskm9926) までどうぞ。ところで「coherent space の日本語文献があんまりないから書いてみたら？」って誘われたんですけど本当に見当たらないですね。ググってみたんですがなんか違うものばっかりヒットします。密かに「うっそだぁ〜」と思ってました。ごめんなさい。

サショー☆シロカミ　初参加で表紙絵やちょっとした強制法の導入小説を担当させていただきました．現在修論制作中で，下手な冒険をすると爆発しますのでいたって基本的なこと（？）を特殊な形で述べてみようと試みたのが The Pony Side of Forcing です．いかがでしたでしょうか．そしてその一場面を表紙絵として描いております．色々と急いで書いたので数学的に変なところがあったらごめんなさい．何かあったら twitter (@sasho1223) へリプライ・DM 等くれるとありがたいです．

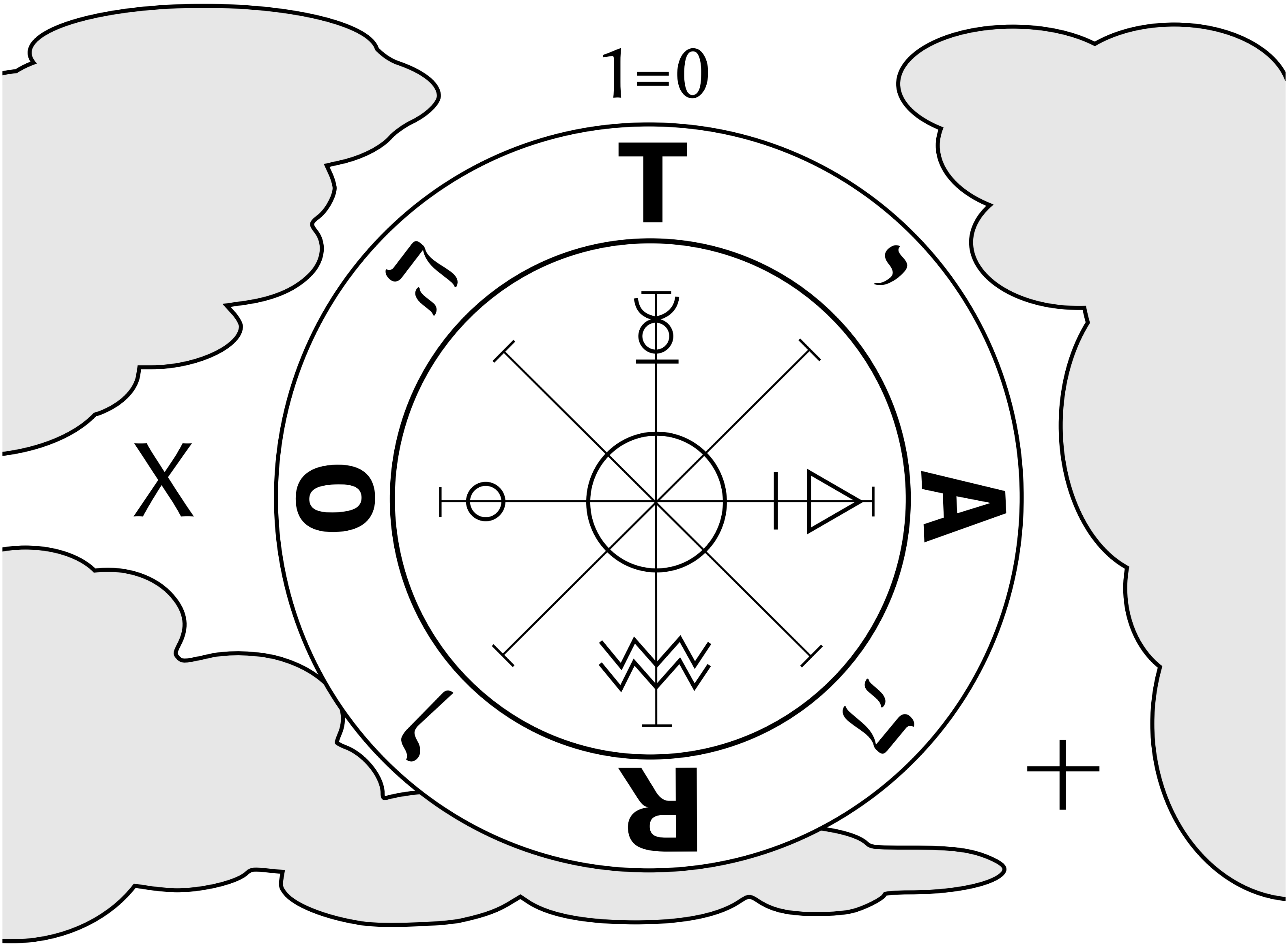
淡中 圏　本名：田中健策　自分が労働に向いてなくて、毎日辛いですが、なんとか楽しくいきてます。よくわからない本を読んだり、よくわからないものを見たり、よくわからない本を書いたり、よくわからないものを作ったりしていきていきたい。
よく分からない自作小説などが展示されてるよくわからない自作 Web サイト　`https://tannakaken.xyz/`

編集後記: １０冊目ですよ。みなさん。年数で言ったら５年。流石にこれだけ続けてると、だんだんと Twitter とかでも反応がちらほら見られるようになって、結構嬉しいです。継続は力ですな。今回は新しい書き手が加わっちゃったりなんかしちゃったり、数学専攻のブロニー（マイリトルポニーのファン）に表紙を頼んじゃったりなんかしちゃったりして、それなりに新しいこともやってます。こうやってさらに続けられるといいですね。
【淡中　圏】

発行者 ： The dark side of Forcing
連絡先 ： http://forcing.nagoya
発行日 ： 2017 年 12 月 31 日

Welcome to

The Dark Side of Forcing



Here is

The Math to The Dark Side